МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)»
ВОЛЖСКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра гуманитарных и естественнонаучных дисциплин

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Направление подготовки

09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Направленность (профиль, специализация) образовательной программы

«Автоматизированные системы обработки информации и управления»

Квалификация

бакалавр

Чебоксары

2019

Содержание

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

По курсу информатики предусмотрено выполнение лабораторных работ. Студент обязан перед выполнением каждой лабораторной работы самостоятельно ознакомиться с теоретическим материалом и по ее результатам предоставить отчет. Отчет к лабораторным работам должен содержать:

1. Заголовок лабораторной работы (название и цель работы).
2. Задание к лабораторной работе.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Описание последовательности действий, произведенных при выполнении работы (ход работы).
5. Результаты выполнения лабораторной работы в электронном варианте или распечатанные.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.

Транспортная задача

<u>Цель работы</u> – приобретение навыков построения математических моделей транспортных задач ЛП и решения этих задач в табличном редакторе.

Основные сведения

Основные понятия

Транспортная задача (ТЗ) – это распределительная задача (РЗ), в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Исходные параметры модели ТЗ:

n – количество пунктов отправления;

m – количество пунктов назначения;

a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i=\overline{1,n}$) [ед. тов.].

b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j=\overline{1,m}$) [ед.тов.].

c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед.тов.].

Искомые параметры модели ТЗ

x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. тов.].

$L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

1. Определение переменных.
2. Проверка сбалансированности задачи.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание ЦФ.
5. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\min;$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,n},\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,m},\\ x_{ij}\ge 0\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right).\end{cases} \tag{1.1}$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл.1.1).

Таблица 1.1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. прод.
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}, [руб./ед. прод.]	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность ед. прод.	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (1.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j . \qquad (1.2)$$

Если (1.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной** (закрытой), в противном случае – **несбалансированной** (открытой). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы $c^{ф}$, величина которых обычно приравнивается к нулю $c^{ф} = 0$. Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина $c^{ф}$ может быть любым положительным числом.

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных реальных перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) фиктивные перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{\hat{o}} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых запрещающих тарифов $c_{ij}^{ç}$. Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{ç} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

Пример построения модели ТЗ

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам перевозки муки с двух складов в три хлебопекарни. Ежемесячные запасы муки на складах равны 79,515 и 92,925 т, а ежемесячные потребности хлебопекарен составляют 68,5, 29,5 и 117,4 т соответственно. Мука на складах хранится и транспортируется в мешках по 45 кг. Транспортные расходы (руб./т) по доставке муки представлены в табл.1.2. Между первым складом и второй хлебопекарней заключен договор о гарантированной поставке 4,5 т муки ежемесячно. В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из второго склада в третью хлебопекарню.

Таблица 1.2

Транспортные расходы по доставке муки (руб./т)

Склады	Хлебопекарни		
	X_1	X_2	X_3
C_1	350	190	420
C_2	400	100	530

ТЗ представляет собой задачу ЛП, которую можно решать симплекс-методом, что и происходит при решении таких задач в табличном редакторе. В то же время существует более эффективный вычислительный метод – метод потенциалов, в случае применения которого используется специфическая структура условий ТЗ (1.1) и, по существу, воспроизводятся шаги симплекс-алгоритма. Исходя из этого, в лабораторной работе необходимо построить модель задачи вида (1.1), пригодную для ее решения методом потенциалов.

Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [меш.] количество мешков с мукой, которые будут перевезены с i-го склада в j-ю хлебопекарню.

Проверка сбалансированности задачи

Прежде чем проверять сбалансированность задачи, надо исключить объем гарантированной поставки из дальнейшего рассмотрения. Для этого вычтем 4,5 т из следующих величин:

- из запаса первого склада $a_1 = 79{,}515 - 4{,}5 = 75{,}015$ т/мес. ;
- из потребности в муке второй хлебопекарни

$$b_2 = 29{,}5 - 4{,}5 = 25{,}000 \text{ т/мес.}$$

Согласно условию задачи мука хранится и перевозится в мешках по 45 кг, то есть единицами измерения переменных x_{ij} являются мешки муки. Но запасы муки на складах и потребности в ней магазинов заданы в тоннах. Поэтому для проверки баланса и дальнейшего решения задачи приведем эти величины к одной единице измерения – мешкам. Например, запас муки на первом складе равен 75,015 т/мес., или $\frac{75{,}015\, т/мес.}{0{,}045\, т/меш.} = 1667\ меш./мес.$, а потребность первой хлебопекарни составляет 68 т/мес., или $\frac{68{,}000\, т/мес.}{0{,}045\, т/меш.} = 1511{,}1 \approx 1512\ меш./мес.$ Округление при расчете потребностей надо проводить в большую сторону, иначе потребность в муке не будет удовлетворена полностью.

Для данной ТЗ имеет место соотношение

$$\underbrace{\overbrace{1667 + 2065}^{склады}}_{3932 меш./мес.} < \underbrace{\overbrace{1512 + 556 + 2609}^{хлебопекарни}}_{4677 меш./мес.}.$$

Ежемесячный суммарный запас муки на складах меньше суммарной потребности хлебопекарен на 4677–3732=945 мешков муки, откуда следует вывод: ТЗ не сбалансирована.

Построение сбалансированной транспортной матрицы

Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 1.3. Стоимость перевозки муки должна быть отнесена к единице продукции, то есть к 1 мешку муки. Так, например, тариф перевозки из первого склада в третий магазин равен $420\ руб./т \cdot 0{,}045\ т/меш. = 18{,}90\, руб./меш.$

Для установления баланса необходим дополнительный фиктивный склад, то есть дополнительная строка в транспортной таблице задачи. Фиктивные тарифы перевозки зададим таким образом, чтобы они были дороже реальных тарифов, например, $c_{3j}^{ô} = 50{,}00$ руб./меш. Невозможность доставки грузов со второго склада в третью хлебопекарню задается в модели с помощью запрещающего тарифа, который должен превышать величину фиктивного тарифа, например, $\tilde{n}_{23}^{ç} = 100{,}00$ руб./меш.

Таблица 1.3

Транспортная матрица задачи

	Хлебопекарни			Запас, мешки
Склады	X_1	X_2	X_3	
C_1	15,75	8,55	18,90	1667
C_2	18,00	4,50	**100,00**	2065
$C_ф$	**50,00**	**50,00**	**50,00**	945
Потребность, мешки	1512	556	2609	$\sum =$ **4677**

Задание ЦФ

Формальная ЦФ, то есть суммарные затраты на все возможные перевозки муки, учитываемые в модели, задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} L(X) &= 15{,}75x_{11} + 8{,}55x_{12} + 18{,}90x_{13} + 18{,}00x_{21} + 4{,}50x_{22} + \\ &+ 100{,}00x_{23} + 50{,}00x_{31} + 50{,}00x_{32} + 50{,}00x_{33} \to \min\ (руб/мес.). \end{aligned} \tag{1.3}$$

При этом следует учитывать, что вследствие использования фиктивных тарифов реальная ЦФ (то есть средства, которые в действительности придется заплатить за транспортировку муки) будет меньше формальной ЦФ (1.3) на стоимость найденных в процессе решения фиктивных перевозок.

Задание ограничений

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2065, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} = 945, \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\
x_{ij} \ge 0 \left(\forall i = \overline{1,3}; \forall j = \overline{1,3}\right).
\end{cases}
\quad \text{(меш./мес.)}
$$

Решение задачи в табличном редакторе.

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий задачи представлены на рис.1.1, 1.2, и в табл.1.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**ПЕРЕМЕННЫЕ**				**ОГРАНИЧЕНИЯ**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев.часть	Знак	Прав.часть
3		x1j				0	=	1667
4		x2j				0	=	2065
5		x3j				0	=	945
6	**ОГРАНИЧЕНИЯ**	Лев.часть	0	0	0			
7		Знак	=	=	=			4677
8		Прав.часть	1512	556	2609		4677	**Баланс**
9								
10		**ТАРИФЫ**	xi1	xi2	xi3			
11		x1j	15,75	8,55	18,9	**ЦФ**		
12		x2j	18	4,5	100	Значение	Направление	
13		x3j	50	50	50	0	min	
14								

Рис.1.1. Экранная форма задачи

Таблица 1.4

Формулы экранной формы задачи

Объект математической модели	Выражение в табличном редакторе
Переменные задачи	**C3:E5**
Формула в целевой ячейке **F13**	**=СУММПРОИЗВ(C3:E5;C11:E13)**
Ограничения по строкам в ячейках **F3, F4, F5**	**=СУММ(C3:E3)** **=СУММ(C4:E4)** **=СУММ(C5:E5)**
Ограничения по столбцам в ячейках **C6, D6, E6**	**=СУММ(C3:C5)** **=СУММ(D3:D5)** **=СУММ(E3:E5)**
Суммарные запасы и потребности в ячейках **H7, G8**	**=СУММ(H3:H5)** **=СУММ(C8:E8)**

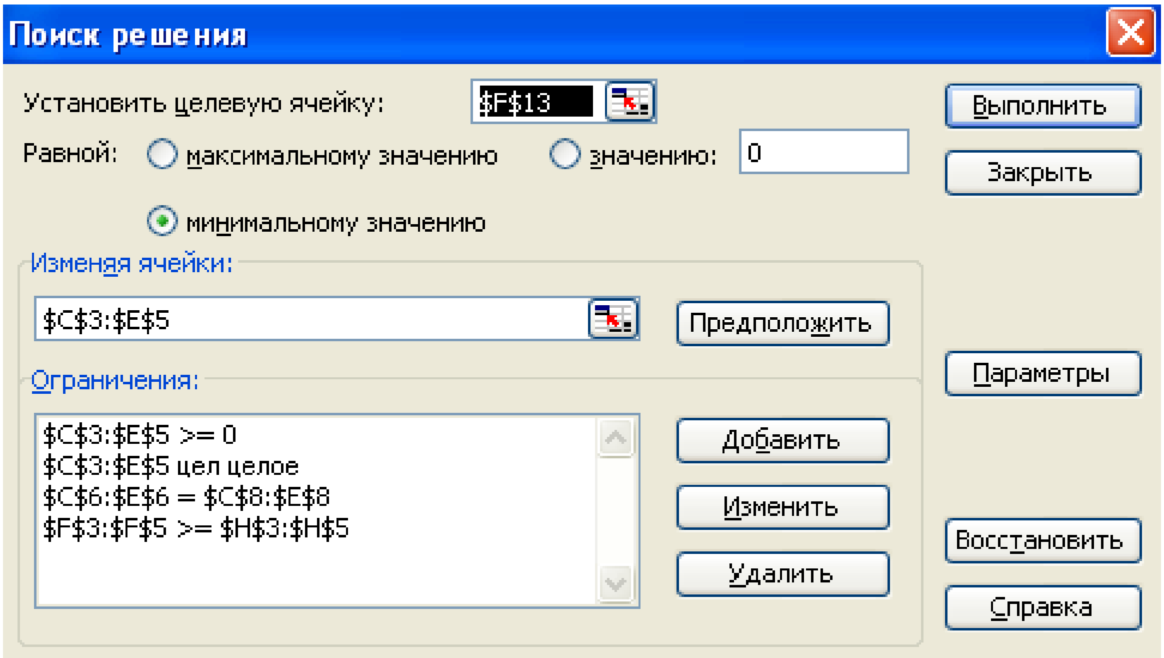


Рис.1.2. Ограничения и граничные условия задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне **"Поиск решения".** Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку **"Параметры"** и заполнить некоторые поля окна **"Параметры поиска решения"** (рис.1.3).

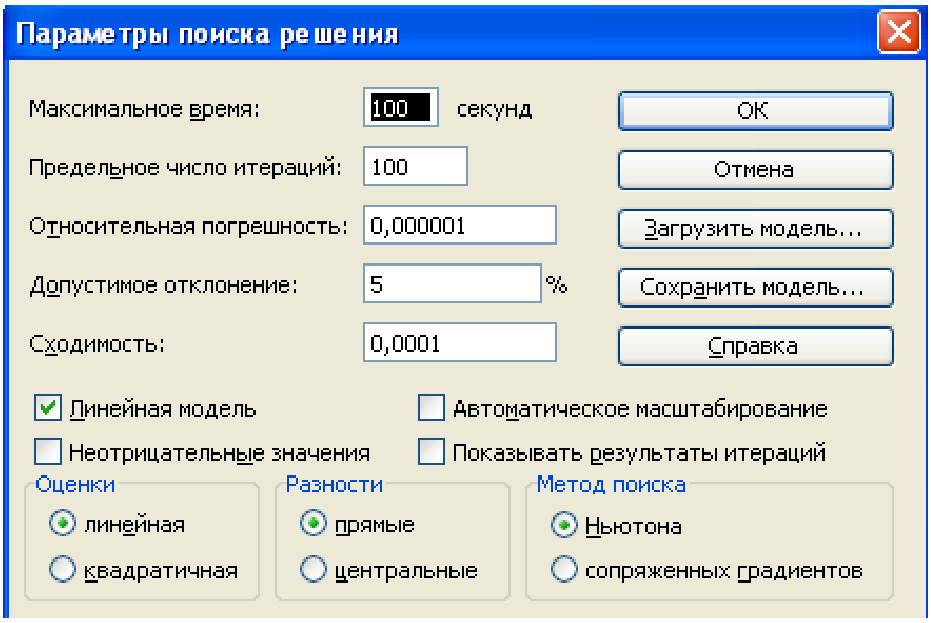


Рис.1.3. Параметры поиска решения

Параметр **"Максимальное время"** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **"Предельное число итераций"** служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **"Относительная погрешность"** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **"Допустимое отклонение"** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **"Сходимость"** применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка **"Линейная модель"** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **ОК**.

Результаты решения задачи представлены на рис. 1.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**ПЕРЕМЕННЫЕ**				**ОГРАНИЧЕНИЯ**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев.часть	Знак	Прав.часть
3		x1j	3	0	1664	1667	=	1667
4		x2j	1509	556	0	2065	=	2065
5		x3j	0	0	945	945	=	945
6	**ОГРАНИЧЕНИЯ**	Лев.часть	1512	556	2609			
7		Знак	=	=	=			4677
8		Прав.часть	1512	556	2609		4677	**Баланс**
9								
10		**ТАРИФЫ**	xi1	xi2	xi3			
11		x1j	15,75	8,55	18,9	**ЦФ**		
12		x2j	18	4,5	100	Значение	Направление	
13		x3j	50	50	50	108410,9	min	
14								

Рис.1.4. Экранная форма после получения решения задачи

Учитывая объем гарантированной поставки с первого склада во вторую хлебопекарню (4,5 т = 100 мешков), получим решение задачи:

$$\tilde{O} = \begin{pmatrix} 3 & 100 & 1664 \\ 1509 & 556 & 0 \\ 0 & 0 & 945 \end{pmatrix}.$$

При таком плане перевозок общая стоимость перевозок составит

$$L=108410{,}9+855=109265{,}9 \text{ руб./мес.}$$

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстри-руйте его преподавателю.
4. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист (см. приложение);
   - транспортную таблицу и модель задачи с указанием всех единиц измерения;
   - результаты решения задачи с указанием единиц измерения.

Варианты заданий

На складах хранится мука, которую необходимо завезти в хлебопекарни. Номера складов и номера хлебопекарен выбираются в соответствии с вариантами табл.1.5. Текущие тарифы перевозки муки [руб./т], ежемесячные запасы муки [т/мес.] на складах и потребности хлебопекарен в муке [т/мес.] указаны в табл.1.6.

При этом необходимо учитывать, что из-за ремонтных работ временно нет возможности перевозить муку с некоторых складов в некоторые хлебопекарни. В табл.1.5 это показано в графе "Запрет перевозки" в формате № склада х № хлебопекарни. Например, «2х3» означает, что нельзя перевозить муку со склада №2 в хлебопекарню №3.

Кроме того, необходимо учесть, что некоторые хлебопекарни имеют договоры на гарантированную поставку муки с определенных складов. В табл.1.5 это показано в графе "Гарантированная поставка" в формате № склада х № хлебопекарни = объем поставки. Например, «1х4=40» обозначает, что между складом №1 и магазином №4 заключен договор на обязательную поставку 40 т муки.

Необходимо организовать поставки наилучшим образом, учитывая, что мука хранится и транспортируется в мешках весом по 50кг.

Таблица 1.5

Номера складов, хлебопекарен, запрещенные и гарантированные поставки

№ Варианта	№ Складов	№ Хлебопекарен	Запрет перевозки	Гарантированная поставка, т/мес.
1	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2х2, 3х4	3х3=50
2	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2х2, 3х5	3х2=40
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1х5, 2х3	4х3=45
4	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3х3, 4х5	3х5=40
5	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1х4, 5х3	1х5=60
6	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5х5, 2х2	3х5=30
7	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3х3, 2х5	4х3=45
8	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1х2, 5х4	3х2=20
9	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5х1, 3х5	5х2=30
10	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5х4, 3х2	4х3=35

Таблица 1.6

Запасы, потребности и тарифы перевозок

Склады	Хлебопекарни					
	1	2	3	4	5	Запас, т/мес.
1	400	600	800	200	200	80
2	300	100	500	600	500	70
3	500	200	100	600	300	60
4	300	700	200	400	900	55
5	200	500	800	200	400	65
Спрос, т/мес.	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	

Контрольные вопросы

1. Что такое транспортная задача?
2. Какова постановка стандартной ТЗ?
3. Запишите математическую модель ТЗ.
4. Перечислите исходные и искомые параметры модели ТЗ.
5. Какова суть каждого из этапов построения модели ТЗ?
6. Раскройте понятие сбалансированности ТЗ.
7. Что такое фиктивные и запрещающие тарифы?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.

Задача о назначении

Цель работы - приобретение навыков построения математических моделей задач о назначении и решения этих задач в табличном редакторе.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи с помощью табличного редактораи представьте его преподавателю.
4. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - транспортную таблицу и модель задачи с указанием всех единиц измерения;
   - результат решения задачи с указанием единиц измерения.

Методические рекомендации

Основные понятия

Задача о назначениях – это распределительная задача, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.), а каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. То есть ресурсы не делимы между работами, а работы не делимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи (ТЗ). Задача о назначениях имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п.

Исходные параметры модели задачи о назначениях

n – количество ресурсов, m – количество работ.

$a_i = 1$ – единичное количество ресурса A_i ($i = \overline{1,n}$), например: один работник; одно транспортное средство; одна научная тема и т.д.

$b_j = 1$ – единичное количество работы B_j ($j = \overline{1,m}$), например: одна должность; один маршрут; одна лаборатория.

4. c_{ij} – характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i. Например, компетентность i-го работника при работе на j-й должности; время, за которое i-е транспортное средство перевезет груз по j-му маршруту; степень квалификации i-й лаборатории при работе над j-й научной темой.

Искомые параметры

1. x_{ij} – факт назначения или неназначения ресурса A_i на работу B_j:

2. $L(X)$ – общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Специфическая структура задачи о назначениях позволила разработать так называемый **"Венгерский метод"** ее решения. Поэтому, хотя в Excel такие задачи решаются обычным симплекс-методом, в лабораторной работе требуется построить модель задачи о назначениях вида (2.1). В некоторых случаях, например, когда c_{ij} – это компетентность, опыт работы, или квалификация работников, условие задачи может требовать максимизации ЦФ, в отличие от (1.1). В этом случае ЦФ $L(X)$ заменяют на $L_1(X) = -L(X)$ и решают задачу с ЦФ $L_1(X) \to \min$, что равносильно решению задачи с ЦФ $L(X) \to \max$.

Таблица 2.1

Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях

Ресурсы, A_i	Работы, B_j				Количество ресурсов
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	1
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	1
Количество работ	1	1	…	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Модель задачи о назначениях

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ \left(i = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,m}\right), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \left(i = \overline{1,n};\ \mathrm{j} = \overline{1,m}\right). \end{cases} \qquad (2.1)$$

Пример построения модели ТЗ

Отдел кадров предприятия устроил конкурсный набор специалистов на две вакантные должности. На эти новые места (НМ) претендуют 3 прежних сотрудника (ПС), уже работающие в других отделах, и 4 новых сотрудника (НС). Номера новых сотрудников, новых и прежних мест выбираются из табл. 2.2. Номера прежних мест являются номерами прежних сотрудников.

Отдел кадров оценил по десятибалльной шкале компетентность новых сотрудников (табл. 2.3) и прежних сотрудников (табл. 2.4) для работы и на новых местах, и на прежних местах (ПМ), то есть занимаемых прежними сотрудниками. Необходимо учесть, что руководство предприятия, во-первых, предпочитает, чтобы прежние сотрудники не претендовали на места друг друга, и, во-вторых, не намерено увольнять прежних сотрудников. Необходимо распределить сотрудников по должностям наилучшим образом.

Таблица 2.2

Номера сотрудников и мест их работы для конкретного варианта

Новые сотрудники (НС)	Места работы прежних сотрудников (ПМ)	Новые места (НМ)
1, 2, 7, 8	2, 4, 6	1, 3

Таблица 2.3

Компетентность новых сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	ПМ1	ПМ2	ПМ3	ПМ4	ПМ5	ПМ6
НС1	6	5	7	8	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5

НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблица 2.4

Компетентность прежних сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Занимаемое место
ПС1	7	6	6	7	7
ПС2	8	9	7	7	8
ПС3	6	5	6	6	6
ПС4	7	9	6	8	8
ПС5	8	7	8	8	7
ПС6	4	5	6	4	5

Решение.

На основе данных таблицы 2.3 выбираем необходимые данные из таблиц 2.3 и 2.4. Исходя из выбранных данных, составляем матрицу:

	НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6
НС1	6	7	6	6	5
НС2	5	8	6	5	8
НС7	9	9	7	9	7
НС8	7	8	8	6	8
ПС2	8	7	8	0	0
ПС4	7	6	0	8	0
ПС6	4	6	0	0	5

Математическая модель задачи.

1) Переменные задачи.

Ведем переменные x_{ij} принимающие два значения:

$x_{ij}=0$, если i-й претендент (P_i) не принимается на j-ю вакансию (V_j),

$x_{ij}=1$, если i-й претендент (P_i) принимается на вакансию (V_j),

где $i=1,2,...7$; $j=1,2,...5$.

2) Ограничения на переменные задачи.

Очевидно, что все переменные задачи неотрицательные и целые числа: $x_{ij} \geq 0$ и x_{ij} – целые. Кроме того, так как каждый претендент может занять только одну вакансию и все вакансии должны быть заняты, должны удовлетворяться следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1,\ j=1,2,...7,\quad \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1,\ i=1,2,...5,$$

другими словами в матрице (x_{ij}) суммы элементов по каждой строке и суммы элементов по каждому столбцу должны быть равны единицам. Это условие означает, что выбор претендентов должен быть таким, чтобы в матрице (x_{ij}), представляющей решение задачи, было бы по одной единице в каждой строке и по одной единице в каждом столбце, остальные элементы матрицы должны равняться нулю.

3) Целевая функция в задаче о назначениях.

Необходимо выбрать претендентов так, чтобы суммарное число очков, набранное ими было бы максимальным. Суммарное число набранных очков вычисляется по формуле:

$$L(X) = \sum_{i-1}^{7} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} c_{ij}\ ;$$

$$L(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+...+c_{75}x_{75}=6x_{11}+7x_{12}+...+5x_{75};$$

Окончательная математическая модель задачи записывается так:

$$L(X)=\sum_{i-1}^{7}\sum_{j=1}^{5}x_{ij}c_{ij}\to \max, ;$$

при ограничениях:

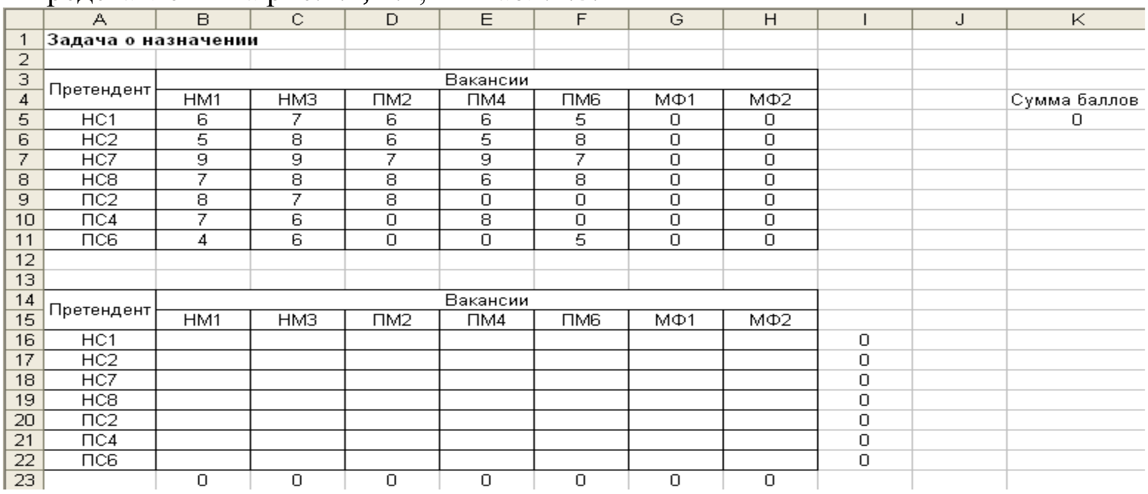
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=1\ \left(i=\overline{1,7}\right),\\ \sum_{i=1}^{7}x_{ij}=1\left(j=\overline{1,5}\right),\\ x_{ij}=\begin{cases}0,\\1,\end{cases}\ \left(i=\overline{1,7};\ \mathrm{j}=\overline{1,5}\right).\end{cases}$$

Составим транспортную модель задачи о назначении, в которой требуется найти максимум целевой функции. Предварительно задачу о назначениях нужно сбалансировать. В рассматриваемом примере эта процедура выполняется добавлением двух столбцов (две фиктивные вакансии) с нулевыми результатами компетентности.

Претендент, P_i	Вакансии, V_j							Количество претендентов
	V_1 (НМ1)	V_2 (НМ3)	V_3 (ПМ2)	V_4 (ПМ4)	V_5 (ПМ6)	V_6 (МФ1)	V_7 (МФ2)	
P_1 (НС1)	6	7	6	6	5	0	0	1
P_2 (НС2)	5	8	6	5	8	0	0	1
P_3 (НС7)	9	9	7	9	7	0	0	1
P_4 (НС8)	7	8	8	6	8	0	0	1
P_5 (ПС2)	8	7	8	0	0	0	0	1
P_6 (ПС4)	7	6	0	8	0	0	0	1
P_7 (ПС6)	4	6	0	0	5	0	0	1
Количество вакансий	1	1	1	1	1	1	1	$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j$

3). Решение задачи в табличном редакторе.

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий задачи представлены на рис.2.1, 2.2, и в табл.2.5.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Задача о назначении**										
2											
3	Претендент	Вакансии									
4		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			Сумма баллов
5	НС1	6	7	6	6	5	0	0			0
6	НС2	5	8	6	5	8	0	0			
7	НС7	9	9	7	9	7	0	0			
8	НС8	7	8	8	6	8	0	0			
9	ПС2	8	7	8	0	0	0	0			
10	ПС4	7	6	0	8	0	0	0			
11	ПС6	4	6	0	0	5	0	0			
12											
13											
14	Претендент	Вакансии									
15		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			
16	НС1								0		
17	НС2								0		
18	НС7								0		
19	НС8								0		
20	ПС2								0		
21	ПС4								0		
22	ПС6								0		
23		0	0	0	0	0	0	0			

Рис.2.1. Экранная форма задачи

Таблица 2.5

Формулы экранной формы задачи

Объект математической модели	Выражение в табличном редакторе
Переменные задачи	B5:H11
Формула в целевой ячейке K5	=СУММПРОИЗВ(B5:H11;B16:H22)
Ограничения по строкам в ячейках I16:I22	=СУММ(B16:H16) Копируем в диапазон I16:I22
Ограничения по столбцам в ячейках B23:H23	=СУММ(B16:B22) Копируем в диапазон B23:H23

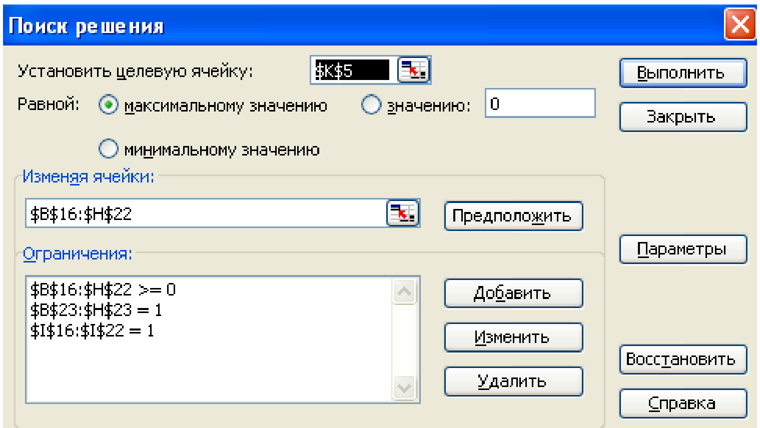


Рис.2.2. Ограничения и граничные условия задачи

В окне «Параметры» установить «Линейная модель», что соответствует решению задачи симплекс-методом.

Результаты решения задачи представлены на рис. 2.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Задача о назначении**										
2											
3	Претендент	Вакансии									
4		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			Сумма баллов
5	НС1	6	7	6	6	5	0	0			41
6	НС2	5	8	6	5	8	0	0			
7	НС7	9	9	7	9	7	0	0			
8	НС8	7	8	8	6	8	0	0			
9	ПС2	8	7	8	0	0	0	0			
10	ПС4	7	6	0	8	0	0	0			
11	ПС6	4	6	0	0	5	0	0			
12											
13											
14	Претендент	Вакансии									
15		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			
16	НС1	0	0	0	0	0	1	0	1		
17	НС2	0	0	0	0	1	0	0	1		
18	НС7	0	1	0	0	0	0	0	1		
19	НС8	0	0	1	0	0	0	0	1		
20	ПС2	1	0	0	0	0	0	0	1		
21	ПС4	0	0	0	1	0	0	0	1		
22	ПС6	0	0	0	0	0	0	1	1		
23		1	1	1	1	1	1	1			

Рис. 2.3. Результаты решения задачи

Получили оптимальное распределение. Возможно, оно не является единственным. Таким образом, наилучшее распределение работников по должностям имеет вид: НС1 не берут на работу, НС2 на ПМ6, НС7 на НМ3, НС8 на ПМ2, ПС2 на НМ1, ПС4 на ПМ4, ПС6 не берут.

Контрольные вопросы

1. Сколько ресурсов требуется в задаче о назначении для выполнения каждой работы.
2. Каким методом решается данная задача.
3. Какова постановка задачи о назначениях?
4. В чем отличие модели задачи о назначениях от модели ТЗ?

5. Каковы исходные и искомые параметры задачи о назначениях?

6. Запишите математическую модель задачи о назначениях.

7. Как записать модель задачи о назначениях, подразумевающую максимизацию ЦФ?

8. Каким образом в модели задачи о назначениях можно запретить конкретное назначение?

9. В чем особенности процесса приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду?

Варианты заданий

Отдел кадров предприятия устроил конкурсный набор специалистов на две вакантные должности. На эти новые места (НМ) претендуют 3 прежних сотрудника (ПС), уже работающие в других отделах, и 4 новых сотрудника (НС). Номера новых сотрудников, новых и прежних мест выбираются по вариантам из табл.2.6. Номера прежних мест являются номерами прежних сотрудников. Отдел кадров оценил по десятибалльной шкале компетентность новых сотрудников (табл.2.7) и прежних сотрудников (табл.3.8) для работы и на новых местах, и на прежних местах (ПМ), то есть занимаемых прежними сотрудниками. Необходимо учесть, что руководство предприятия предпочитает, чтобы прежние сотрудники не претендовали на места друг друга. Необходимо распределить сотрудников по должностям наилучшим образом.

Таблица 2.6

Номера сотрудников и мест их работы для конкретного варианта

№ варианта	Новые сотрудники (НС)	Места работы прежних сотрудников (ПМ)	Новые места (НМ)
1	3, 4, 7, 8	1, 2, 3	1, 2
2	1, 2, 5, 6	2, 5, 6	2, 3
3	5, 6, 7, 8	1, 2, 5	3, 4
4	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	1, 4
5	1, 2, 3, 4	2, 3, 4	2, 4
6	2, 4, 6, 8	3, 4, 6	1, 3
7	1, 3, 5, 7	2, 3, 6	1, 4
8	2, 3, 6, 7	3, 4, 5	2, 3
9	1, 4, 5, 8	2, 3, 5	3, 4
10	2, 3, 4, 5	1, 2, 6	1, 2

Таблица 2.7

Компетентность новых сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	ПМ1	ПМ2	ПМ3	ПМ4	ПМ5	ПМ6
НС1	6	5	7	6	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5
НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблица 2.8

Компетентность прежних сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Занимаемое место
ПС1	7	6	6	7	7
ПС2	8	9	7	7	8
ПС3	6	5	6	6	6
ПС4	7	9	6	8	8
ПС5	8	7	8	8	7
ПС6	4	5	6	4	5

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Графический и симплексный методы решения задач линейного программирования.

<u>Цель работы</u> - приобретение навыков решения задач линейного программирования графическим и симплексным методами.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и найдите оптимальное решение графическим и симплексным методом.
2. Найдите оптимальное решение задачи в табличном редакторе.
3. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Решение задачи ЛП графическим методом

Рассмотрим пример нахождения оптимального решения графическим методом для следующей задачи линейного программирования:

$$L(X) = 5 + x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе, необходимо выполнить следующие действия.

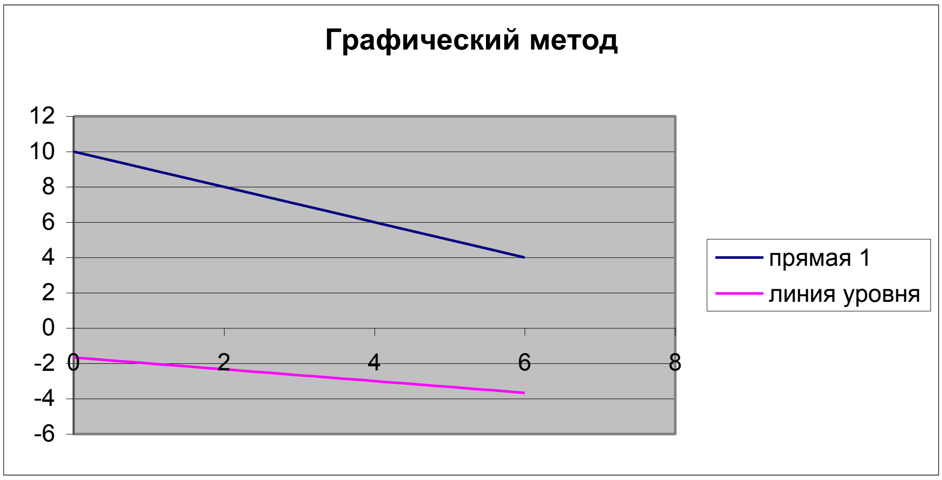
1. В столбце **A**, начиная с ячейки **A2**, задаем последовательность значений переменной x_1 как арифметическую прогрессию с первым членом, равным нулю, разностью 0,2, предельным значением 6.

2. В ячейке **B2** вводим формулу **=10-A2** и копируем ее в столбце **B**. Прямые x_1=6, x_2=8 зададим позже, как границы рисунка.

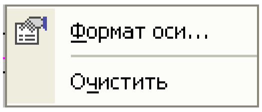
3. Вводим в ячейку **C2** формулу линии уровня **=($D$2-5-A2)/3** и копируем ее в столбце **C**.

4. В ячейке **D2** вводим значение 0.

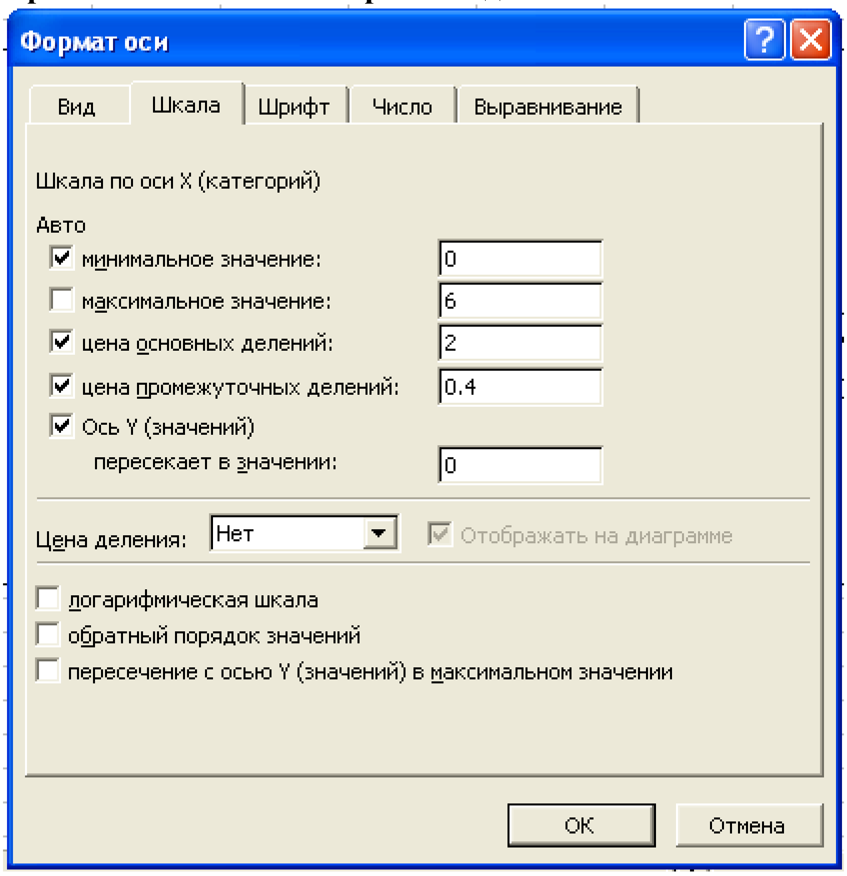
5. Выделяем диапазон **A2:C32** и **«Мастером диаграмм»** строим точечную диаграмму:



6. Убираем лишнее через контекстное меню:

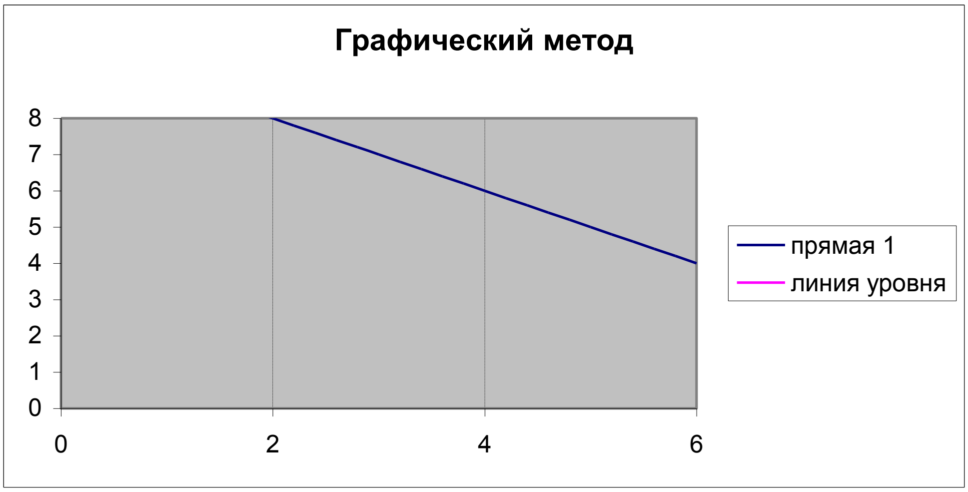


Командами **Формат оси → Шкала открываем** диалоговое окно:

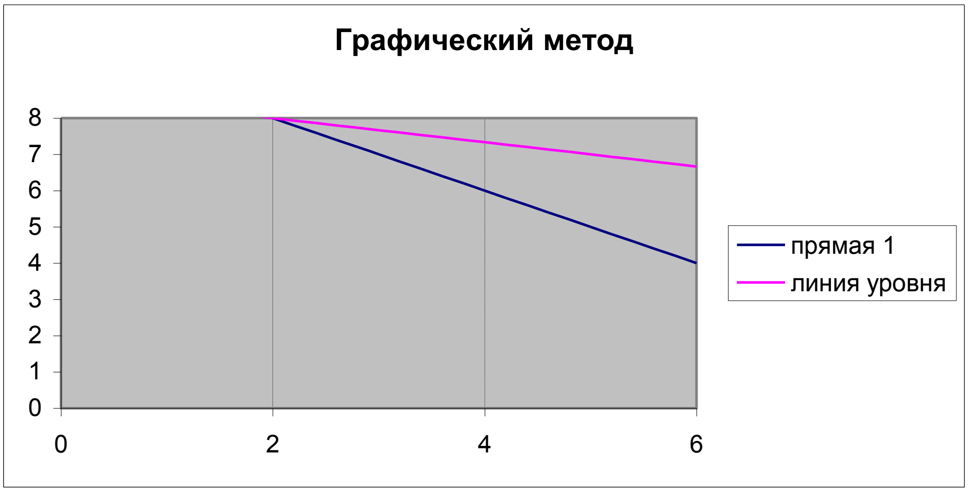


Устанавливаем в нем максимальное значение: **6**, нажимаем **ОК**. Аналогично по **оси Y** задаем минимальное значение **0**, максимальное значение **8**.

Приводим диаграмму к виду, показанному на рисунке:



7. Изменяя значения ячейки **D2**, передвигаем линию уровня в сторону выхода из области допустимых решений:



Из диаграммы видно, что точкой выхода линии уровня из многоугольника допустимых решений является точка **(2; 8)**.

Решение задачи ЛП симплексным методом

Рассмотрим пример нахождения оптимального решения симплексным методом для следующей задачи линейного программирования:

$$L(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть второго и третьего ограничений-неравенств типа «≤» вводим дополнительные переменные x_5 и x_6 с коэффициентами +1:

$$L(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

За базисные переменные возьмем переменные: x_4, x_5, x_6. Остальные переменные (x_1, x_2, x_3) называются свободными. Выразим целевую функцию через свободные переменные. Для этого выразим базисные переменные в системе ограничений через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_4 = 6 - x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_5 = 10 - x_1 - 2x_2 - x_3, \\ x_6 = 10 - 2x_1 - x_2 - x_3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Затем подставим их в целевую функцию:

$$L(x) = x_1 + x_2 + x_3 - (6 - x_1 - x_2 - 2x_3) \to \max;$$

$$L(x) = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6 \to \max.$$

Составим первую симплекс таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**БП**	**СЧ**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
2	**x4**	6	1	1	2	1	0	0
3	**x5**	10	1	2	1	0	1	0
4	**x6**	10	2	1	1	0	0	1
5	**С**	-6	-2	-2	-3	0	0	0

Т.к. в целевой строке (С) есть отрицательные коэффициенты при неизвестных, то данное опорное решение не оптимально. За разрешающий столбец принимается тот, который в целевой строке имеет наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент (столбец Е – разрешающий столбец):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**БП**	**СЧ**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
2	**x4**	6	1	1	2	1	0	0
3	**x5**	10	1	2	1	0	1	0
4	**x6**	10	2	1	1	0	0	1
5	**С**	-6	-2	-2	-3	0	0	0

Составим отношения свободных членов к соответствующим положительным коэффициентам разрешающего столбца, для этого в ячейке **I2** введем формулу **=B2/E2** и копируем в ячейки диапазона **I2:I4**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**БП**	**СЧ**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**Отношения**
2	**x4**	6	1	1	2	1	0	0	3
3	**x5**	10	1	2	1	0	1	0	10
4	**x6**	10	2	1	1	0	0	1	10
5	**С**	-6	-2	-2	-3	0	0	0	

За разрешающую строку берут ту строку, которая имеет наименьшее отношение:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**БП**	**СЧ**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**Отношения**
2	**x4**	6	1	1	2	1	0	0	3
3	**x5**	10	1	2	1	0	1	0	10
4	**x6**	10	2	1	1	0	0	1	10
5	**С**	-6	-2	-2	-3	0	0	0	

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент (ячейка **Е2**). Составим следующую симплекс-таблицу в диапазоне **А7:Н10**. Разрешающую строку разделим на разрешающий элемент, для того в ячейке **Е7** вводим формулу **=E2/$E$2** и копируем ее в диапазон **B7:H7**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**БП**	**СЧ**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**Отношения**
2	**x4**	6	1	1	2	1	0	0	3
3	**x5**	10	1	2	1	0	1	0	10
4	**x6**	10	2	1	1	0	0	1	10
5	**С**	-6	-2	-2	-3	0	0	0	
6									
7	**x3**	3	1/2	1/2	1	1/2	0	0	
8	**x5**								
9	**x6**								
10	**С**								

Остальные коэффициенты таблицы находим по правилу «прямоугольника», для этого в ячейке В8 введем формулу **=B3-$E3*B$2/$E$2** и копируем ее в диапазон **B8:H10**. В результате вторая симплекс-таблица примет вид:

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	x3	3	1/2	1/2	1	1/2	0	0
8	x5	7	1/2	1 1/2	0	- 1/2	1	0
9	x6	7	1 1/2	1/2	0	- 1/2	0	1
10	C	3	- 1/2	- 1/2	0	1 1/2	0	0

Полученная симплекс-таблица не оптимальна. За разрешающий столбец можно взять и столбец **C** и столбец **D**. Возьмем за разрешающий столбец **D**. После аналогичных преобразований получим в диапазоне **B12:H15** следующую симплекс-таблицу:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	x3	3	1/2	1/2	1	1/2	0	0	6
8	x5	7	1/2	1 1/2	0	- 1/2	1	0	4 2/3
9	x6	7	1 1/2	1/2	0	- 1/2	0	1	14
10	C	3	- 1/2	- 1/2	0	1 1/2	0	0	
11									
12	x3	2/3	1/3	0	1	2/3	- 1/3	0	
13	x2	4 2/3	1/3	1	0	- 1/3	2/3	0	
14	x6	4 2/3	1 1/3	0	0	- 1/3	- 1/3	1	
15	C	5 1/3	- 1/3	0	0	1 1/3	1/3	0	

Полученная симплекс-таблица снова не оптимальна. После аналогичных преобразований в диапазоне **B17:H20**, окончательно получаем:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
12	x3	2/3	1/3	0	1	2/3	- 1/3	0	2
13	x2	4 2/3	1/3	1	0	- 1/3	2/3	0	14
14	x6	4 2/3	1 1/3	0	0	- 1/3	- 1/3	1	3 1/2
15	C	5 1/3	- 1/3	0	0	1 1/3	1/3	0	
16									
17	x1	2	1	0	3	2	-1	0	
18	x2	4	0	1	-1	-1	1	0	
19	x6	2	0	0	-4	-3	1	1	
20	C	6	0	0	1	2	0	0	

Так как все значения диапазона **C20:H20** не меньше нуля, то решение

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

оптимально и его улучшить нельзя.

Ответ: (2, 4, 0, 0), max L(X)=6.

Замечание. Если задача решается на минимум, то разрешающий столбец выбирается по наибольшему положительному коэффициенту целевой строки. Разрешающая строка выбирается также.

Критерий оптимальности: если в целевой строке нет положительных коэффициентов, то решение оптимально.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные этапы решения задач ЛП графическим методом?
2. Как определить, какая полуплоскость отвечает линейному неравенству?
3. Что называется областью допустимых решений?
4. Какая линия называется линией уровня?
5. Как определить максимальное и минимальное значения линейной целевой функции в области допустимых решений?
6. Какие случаи возможны при решении задачи ЛП графическим методом?
7. В каких случаях задачу линейного программирования можно решить графическим методом?
8. Каковы основные этапы решения задач ЛП симплексным методом?
9. Как определить разрешающий столбец?

10. Как определить разрешающую строку?
11. В чем заключается правило «прямоугольника»?
12. Назовите критерий оптимальности для задачи на max (min).
13. Какие особые случаи применения симплекс-метода вы знаете?
14. Какие переменные называются базисными, а какие свободными?

Варианты заданий

Используя табличный редактор, найти решение симплексным методом для задачи ЛП, соответствующей заданному варианту

№ варианта	Математическая модель	
1	**1.** $L(X)=2x_1+x_2\to\min;$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 12,\\ 2x_1-x_2\le 12,\\ 2x_1-x_2\ge 0,\\ 2x_1+x_2\ge 4,\\ x_2\ge 0.\end{cases}$	**2.** $2)L(X)=3x_1+4x_2+x_3\to\max;$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 10,\\ 2x_1+x_2+2x_3\le 6,\\ 3x_1+x_2+2x_3\le 12,\\ x_j\ge 0\ \forall j.\end{cases}$
2	**1.** $L(X)=x_1-3x_2\to\min;$ $\begin{cases} -x_1+x_2\le 6,\\ -2x_1+x_2\le 6,\\ x_1+3x_2\ge -3,\\ x_1-2x_2\le 2,\end{cases}$	**2.** $L(X)=2x_1+3x_2+x_3\to\max;$ $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3\le 15,\\ x_1+x_2+x_3\le 7,\\ 2x_1+x_2+4x_3\le 12,\\ x_j\ge 0\ \forall j.\end{cases}$
3	**1.** $L(X)=4x_1-3x_2\to\max;$ $\begin{cases} -x_1+x_2\le 5,\\ 5x_1-2x_2\le 20,\\ 8x_1-3x_2\ge 0,\\ 5x_1-6x_2\le 0.\end{cases}$	**2.** $L(X)=6x_1+12x_2+3x_3\to\max;$ $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3\le 12,\\ x_1+2x_2+2x_3\le 15,\\ 2x_1-x_2-3x_3\le 10,\\ x_j\ge 0\ \forall j.\end{cases}$
4	**1.** $L(X)=-x_1+4x_2\to\min;$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24,\\ -8x_1+3x_2\le 24,\\ 2x_1-3x_2\le 12,\\ 4x_1+3x_2\ge -12.\end{cases}$	**2.** $L(X)=x_1+x_2+x_3\to\max;$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 7,\\ 2x_1+x_2+3x_3\le 9,\\ 3x_1+x_2+4x_3\le 12,\\ x_j\ge 0\ \forall j.\end{cases}$
5	**1.** $L(X)=x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases} x_2\le 6,\\ -3x_1+x_2\le 12,\\ x_1+x_2\ge 0,\\ x_1-x_2\le 0,\\ x_1+2x_2\le 12.\end{cases}$	**2.** $L(X)=-3x_1-2x_2-2x_3\to\min$ $\begin{cases} x_2+x_3\le 4,\\ 2x_1+x_2+2x_3\le 6,\\ 2x_1-x_2+2x_3\le 2,\\ x_j\ge 0\ \forall j.\end{cases}$

6	**1.** $L(X)=3x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\geq -4,\\ x_1+x_2\geq 0,\\ x_1+2x_2\geq 2,\\ x_1-x_2\leq 2.\end{cases}$	**2.** $L(X)=-x_1+x_2-3x_3\to\min;$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3\leq 2,\\ x_1+3x_2+x_3\leq 6,\\ x_1+x_2-x_3\leq 2,\\ x_j\geq 0\ \forall \mathrm{j}.\end{cases}$
7	**1.** $L(X)=3x_1+5x_2-5x_5\to\min;$ $\begin{cases}x_1+x_2\geq 0,\\ 3x_1+x_2\leq 3,\\ 5x_1+4x_2\geq 20,\\ x_1-x_2\geq 0.\end{cases}$	**2.** $L(X)=-3x_1-2x_2+x_3\to\min;$ $\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3\leq 3,\\ x_1+2x_2+3x_3\leq 14,\\ 2x_1+x_2+3x_3\leq 16,\\ x_j\geq 0\ \forall \mathrm{j}.\end{cases}$
8	**1.** $L(X)=2x_1+5x_2\to\min;$ $\begin{cases}2x_1-x_2\geq 0,\\ 2x_1+x_2\leq 16,\\ -2x_1+5x_2\geq 3,\\ -x_1+2x_2\leq 2.\end{cases}$	**2.** $L(X)=-5x_1-2x_2-3x_3\to\min;$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2+3x_3\leq 2,\\ -3x_1+4x_2+5x_3\leq 10,\\ x_1-4x_2+x_3\leq 1,\\ x_j\geq 0\ \forall \mathrm{j}.\end{cases}$
9	**1.** $L(X)=x_1+3x_2\to\max;$ $\begin{cases}-2x_1+x_2\leq 2,\\ -x_1+2x_2\leq 7,\\ x_1+3x_2\leq 18,\\ 4x_1-3x_2\leq 12,\\ x_j\geq 0\ (\mathrm{j}=1,2).\end{cases}$	**2.** $L(X)=x_1+2x_2-2x_3\to\max;$ $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3\leq 8,\\ x_1+2x_2+2x_3\geq 4,\\ 3x_1-2x_2+x_3=12,\\ x_j\geq 0\ \forall \mathrm{j}.\end{cases}$
10	**1.** $L(X)=x_1+4x_3\to\max;$ $\begin{cases}-4x_1+x_2\leq 4,\\ -x_1+x_2\leq 5,\\ -x_1+2x_2\leq 2,\\ 3x_1+4x_2\geq 12,\\ x_j\geq 0\ (\mathrm{j}=1,2).\end{cases}$	**2.** $L(X)=x_1-2x_2+3x_3\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+x_2-2x_3\leq 3,\\ 2x_1+x_2+x_3=2,\\ 3x_1+x_2+2x_3\geq 3,\\ x_j\geq 0\ \forall \mathrm{j}.\end{cases}$
11	**1.** $L(X)=-3x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\leq 12,\\ 3x_1-2x_2\leq 6,\\ 3x_1+x_2\geq 3,\\ x_j\geq 0\ (\mathrm{j}=1,2).\end{cases}$	**2.** $L(X)=2x_1+x_2+3x_3\to\min;$ $\begin{cases}x_1+x_3\leq 4,\\ 2x_1+x_2=4,\\ 3x_1+2x_2-2x_3\geq 2,\\ x_j\geq 0\ \forall \mathrm{j}.\end{cases}$

12	**1.** $L(X)=2x_1-4x_2 \to \min;$ $$\begin{cases} 5x_1-2x_2 \ge 0, \\ -x_1+2x_2 \le 8, \\ x_1-3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$	**2.** $L(X)=x_1-x_2-2x_3 \to \min;$ $$\begin{cases} x_1-x_2-x_3 \ge 1, \\ -2x_1+3x_2=1, \\ -3x_1+4x_2+2x_3 \le 1, \\ x_j \ge 0\ \forall j. \end{cases}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

Целочисленные задачи линейного программирования

Часть 1. Задача коммивояжера (метод ветвей и границ)

Цель работы - знакомство с задачей целочисленного линейного программирования – задачей коммивояжера, изучение решения в табличном редакторе.

Порядок выполнения работы

1.Изучить решение предлагаемой задачи коммивояжера.

2.В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить математическую модель задачи и найти решение.

3.Оформить отчет о выполнении задания с приведением условия задачи, формул для расчета, результатов решения и заключения.

Основные сведения

К задачам с булевыми переменными относятся задачи, переменные в которых могут принимать только два значения: 0 или 1. К таким задачам относится задача коммивояжера. Рассмотрим постановку задачи коммивояжера.

Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов i и j известны и составляют c_{ij} . Коммивояжер выезжает из какого-либо города и должен посетить все города, побывав в каждом только один раз и вернуться в исходный город. Ставится задача определить такую последовательность объезда городов, или маршрут, при которой суммарная длина маршрута была бы минимальной.

Математическая модель.

Определим булевы переменные задачи: $x_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города i в город j, и $x_{ij} = 0$, если коммивояжер не переезжает из города i в город j.

Тогда задача заключается в определении минимума целевой функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \text{ – только один въезд в город } j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n} \text{ – только один выезд из города } i.$$

В задаче коммивояжера необходимо еще одно условие, а именно:

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2,\ i \ne j,\ i, j = 2,\ldots, n.$$

Это специальное условие обеспечивает устранение нескольких несвязанных между собой маршрутов и циклов, попросту означающих перемещение коммивояжера по замкнутому частичному маршруту.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение:

В ячейки B13:F17 вводим матрицу расстояний.

Вводим формулы

Ячей-ка	Формула	Примечание
B9	=СУММ(B4:B8)	Копируем в диапазон B9:F9
G4	=СУММ(B4:F4)	Копируем в диапазон G4:G8
C19	=СУММПРОИЗВ(B4:F8;B13:F17)	Целевая функция
E19	=B4+C5+D6+E7+F8	Исключение пути $i \rightarrow i$
B23	=$C$10–C10+4*C5	Копируем в диапазон B23:E23
B24	=$D$10–C10+4*C6	Копируем в диапазон B24:E24
B25	=$E$10–C10+4*C7	Копируем в диапазон B25:E25
B26	=$F$10–C10+4*C8	Копируем в диапазон B26:E26

Исходные данные приведены на рис.4.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА**							
2	***Матрица переменных***							
3		1	2	3	4	5	*Ограничения*	
4	1						0	
5	2						0	
6	3						0	
7	4						0	
8	5						0	
9	*Ограничения*	0	0	0	0	0		
10	*Переменные u*							
11	***Матрица расстояний***							
12		1	2	3	4	5		
13	1	10000	7	2	9	7		
14	2	5	10000	3	9	1		
15	3	4	8	10000	5	3		
16	4	5	6	4	10000	7		
17	5	7	6	3	7	10000		
18								
19	***Целевая функция***		0		0	*исключение пути*		
20								
21	***Дополнительные ограничения***							
22		*2*	*3*	*4*	*5*			
23	*2*	0	0	0	0			
24	*3*	0	0	0	0			
25	*4*	0	0	0	0			
26	*5*	0	0	0	0			
27								

Рис. 4.1. Исходные данные задачи

Сценарий решения:

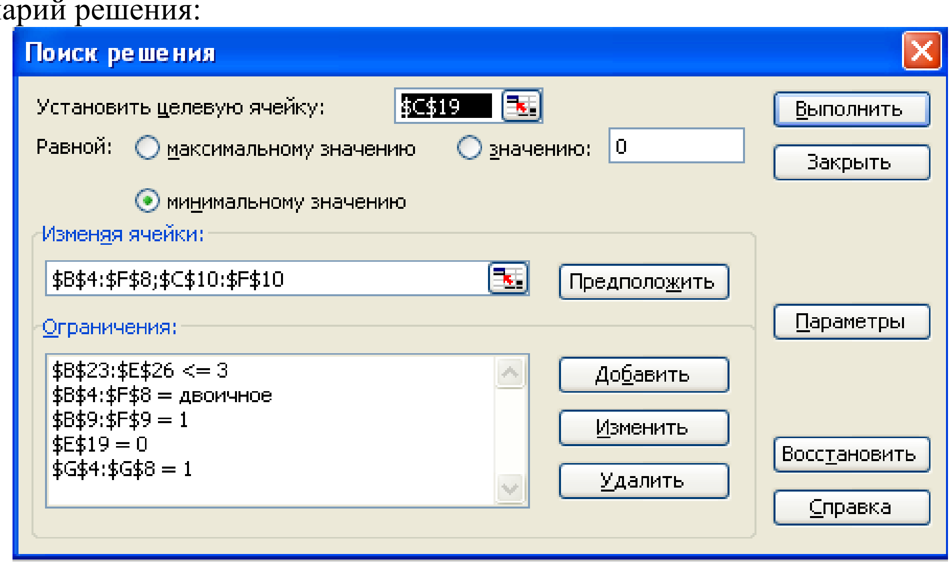


Рис.4.2. Окно Поиск решения.

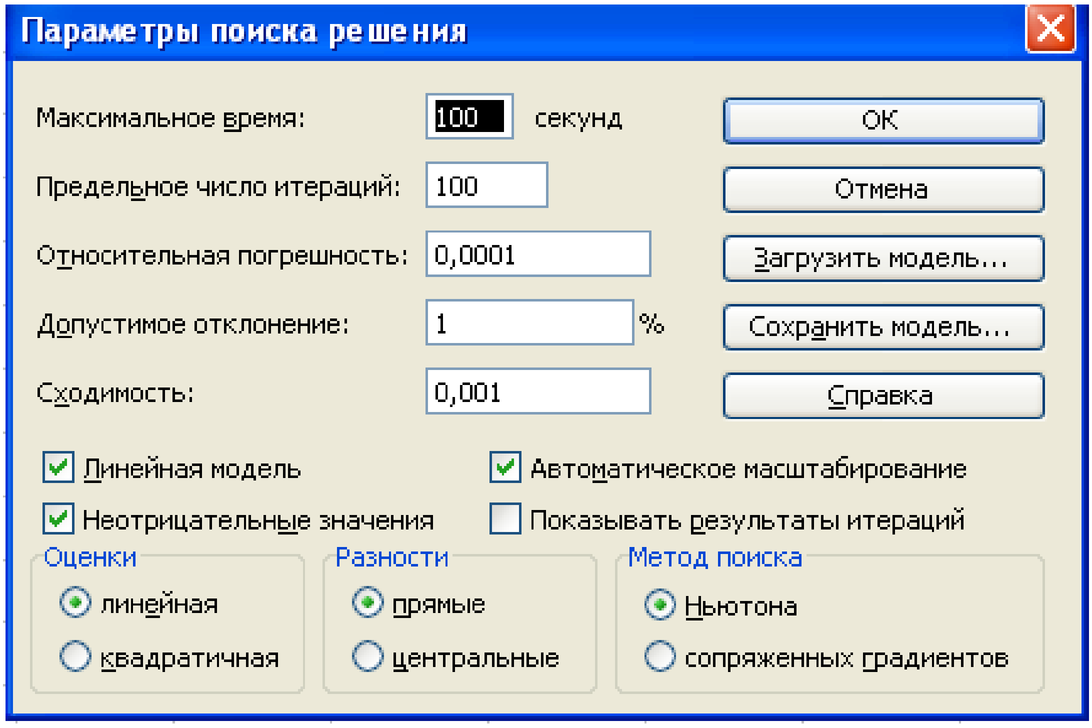


Рис. 4.3. Параметры Поиска решения.

Он приводит к следующим результатам:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА**							
2	***Матрица переменных***							
3		1	2	3	4	5	*Ограничения*	
4	1	0	0	1	0	0	1	
5	2	0	0	0	0	1	1	
6	3	0	0	0	1	0	1	
7	4	0	1	0	0	0	1	
8	5	1	0	0	0	0	1	
9	*Ограничения*	1	1	1	1	1		
10	*Переменные u*		2	0	1	3		
11	***Матрица расстояний***							
12		1	2	3	4	5		
13	1	10000	7	2	9	7		
14	2	5	10000	3	9	1		
15	3	4	8	10000	5	3		
16	4	5	6	4	10000	7		
17	5	7	6	3	7	10000		
18								
19	***Целевая функция***		21		0	*исключение пути*		
20								
21	***Дополнительные ограничения***							
22		*2*	*3*	*4*	*5*			
23	*2*	0	2	1	3			
24	*3*	-2	0	3	-3			
25	*4*	3	1	0	-2			
26	*5*	1	3	2	0			
27								

Рис. 4.4. Результаты решения задачи коммивояжера

Ответ: маршрут 1–3–4–2–5–1. Длина маршрута – 21.

Контрольные вопросы

1. Какова постановка задачи коммивояжера?
2. Каковы исходные и искомые параметры задачи коммивояжера?
3. Запишите математическую модель задачи коммивояжера.

Варианты заданий

Для матрицы расстояний

$$\begin{pmatrix} \infty & a & b & c & d \\ e & \infty & f & g & h \\ k & m & \infty & n & p \\ q & r & s & \infty & t \\ x & y & z & w & \infty \end{pmatrix}$$

решить задачу коммивояжера.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*x*	*y*	*z*	*w*
1)	9	4	2	9	5	7	2	1	4	3	7	3	1	6	7	1	4	4	7	6
2)	8	9	1	3	5	7	4	8	6	7	4	2	4	7	1	4	1	3	5	5
3)	5	5	4	4	4	3	8	3	2	4	6	1	2	7	5	6	5	9	3	4
4)	2	6	9	3	3	2	2	4	8	6	1	7	5	7	7	2	9	2	7	1
5)	1	8	5	3	1	5	9	5	8	7	8	9	5	8	6	1	5	4	9	4
6)	7	7	5	1	8	7	4	2	9	7	8	2	5	6	9	1	6	2	4	3
7)	7	1	8	1	9	2	5	9	8	8	6	9	2	7	2	7	6	3	4	1
8)	6	6	6	8	8	5	2	9	8	1	8	7	9	4	3	4	1	1	1	7
9)	7	7	9	3	8	6	4	6	3	8	5	8	7	3	4	5	8	9	9	5
10)	1	2	7	4	2	8	2	3	1	4	4	7	3	1	6	2	7	5	2	8

Часть 2. Метод Гомори.

Цель работы:

1) ознакомиться с теорией метода Гомори;
2) научиться решать задачи целочисленного программирования.

Теоретические сведения

Среди практических задач важное место занимают задачи математического программирования с требованием целочисленности переменных (всех или части).

Решение общей целочисленной задачи является очень сложным. Наиболее разработанными и универсальными являются методы решения задач линейного целочисленного программирования, которые формулируются следующим образом: найти значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, доставляющих экстремум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr$$

и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} a_{i0}, \quad i = \overline{1,m},$$

а также условиям неотрицательности

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

и целочисленности

$$x_j \text{ - целые}, \; j = \overline{1,p} \quad (p \le n).$$

Метод отсечений (метод Гомори)

Метод Гомори основан на применении симплекс-метода и метода отсечения.

Алгоритм метода

1. Сформулированная задача решается симплекс-методом без учета целочисленности.

2. Если в результате получено целочисленное оптимальное решение, то цель достигнута. В противном случае выбирается переменная с нецелочисленным оптимальным значением (если дробных переменных несколько, то выбирается та, у которой дробная часть больше).

3. Для выбранной неизвестной записывается условие отсечения её нецелочисленного значения в виде линейного неравенства. Новое ограничение добавляется в симплексную таблицу с оптимальным решением, и переходим к шагу 1.

Признаком отсутствия целочисленного решения является отсутствие дробных значений коэффициентов в строке с дробным значением базисной переменной.

Чтобы сформулировать условие отсечения в процессе решения задачи целочисленного линейного программирования, необходимо из последней (оптимальной) симплекс-таблицы выписать уравнение, содержащее выбранную нецелочисленную неизвестную $x_к$:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = a_{k0},$$

где x_k — базисная неизвестная; x_j — свободная неизвестная; a_{k0} - нецелочисленное значение базисной переменной. Тогда условие отсечения будет иметь вид

$$\sum_{j} \{a_{kj}\} x_j \geq \{a_{k0}\}.$$

Здесь $\{a_{kj}\}$, $\{a_{k0}\}$ — дробные части соответствующих чисел.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.

2. Решить задачи симплексным методом (номер задачи выбирает преподаватель).

Варианты заданий

1. $$F(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые} \end{cases}$$

2. $$F(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые} \end{cases}$$

3. $$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

4. $$F = 110x_1 + 90x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,2}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

5. $$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

6. $$F = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

7. $F = x_4 - x_5 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,5}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

8. $F = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14, \\ 2x_2 + x_3 \ge 7, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

9. $F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

10. $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 88, \\ x_1 \le 22, \\ 5x_2 \le 90, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,2}) \quad \textit{и} \quad \textit{целые}. \end{cases}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5.

Динамическое программирование. Задача распределения средств

<u>Цель работы</u> – знакомство с задачей динамического программирования – задачей распределения средств, изучение различных методов решения в системе компьютерной математики.

Общая схема решения задач динамического программирования.

Для решения задач динамического программирования необходимо выполнить следующие действия:

- Определить этапы.
- Определить на каждом этапе вариантов решения (альтернатив).
- Определить состояния на каждом этапе.

В основе решения задачи лежит *принцип оптимальности Беллмана*: на каждом этапе принимается такое решение, которое обеспечивает оптимальность с данного этапа до конца процесса, то есть на каждом этапе необходимо принимать решение, просматривая его последствия до самого конца процесса. Так как последовательность решений следует просматривать до самого конца процесса, то варианты анализируются с конца процесса.

Порядок выполнения работы

Постановка задачи:

Между четырьмя предприятиями распределяются 60 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x. Значения прироста задаются в виде таблицы $g_i(x)$. Найти такой план распределения 60 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Этапы выполнения:

1. В ячейках A3:E8 вводим исходные данные (см. рис. 5.1)

	A	B	C	D	E
1	**Исходные данные**				
2					
3	Средства x , млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
4		$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
5	0	0	0	0	0
6	20	7	6	14	14
7	40	23	23	21	20
8	60	31	30	34	35
9					

Рис. 5.1. Исходные данные

2. Заполним таблицу этапа 4. Для этого введем формулы:

Ячейка	Формула	Примечание
C12	=E5	
D13	=E6	
E14	=E7	
F15	=E8	

G12	=МАКС(C12:F12)	Копируем в диапазон G12:G15

В ячейках H12:H15 записываем те значения x, которым соответствуют значения столбца G12:G15. Результаты этапа 4 представлены на рис. 5.2.

Этап 4	0	20	40	60	$z_4(s_3)$	x_4^*
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

Рис. 5.2. Этап 4

3. Заполним таблицу этапа 3. Для этого введем формулы:

Ячейка	Формула	Примечание
L12	=$D$5	Копируем в диапазон L12:L15
N12	=G12	Копируем в диапазон N12:N15
P12	=L12+N12	Копируем в диапазон P12:P15
Q13	=$D$6	Копируем в диапазон Q13:P15
S13	=G12	Копируем в диапазон S13:S15
U13	=Q13+S13	Копируем в диапазон U13:U15
V14	=$D$7	Копируем в диапазон V14:U15
X14	=G12	Копируем в диапазон X14:X15
Z14	=V14+X14	Копируем в диапазон Z14:Z15
AA15	=$D$8	
AC15	=G12	
AE15	=AA15+AC15	
AF12	=МАКС(P12;U12;Z12;AE12)	Копируем в диапазон AF12:AF15

В столбце AG12:AG15 записываем те значения x, которым соответствуют значения столбца AF12:AF15. Результаты этапа 3 представлены на рис. 5.3.

Этап 3	0	20	40	60	$z_3(s_2)$	x_3^*
0	0 + 0 = **0**				0	0
20	0 + 14 = **14**	14 + 0 = **14**			14	0 или 20
40	0 + 20 = **20**	14 + 14 = **28**	21 + 0 = **21**		28	20
60	0 + 35 = **35**	14 + 20 = **34**	21 + 14 = **35**	34 + 0 = **34**	35	0

Рис. 5.3. Этап 3.

4. Аналогично п.3. строим таблицы для этапа 2 и этапа 1. Результаты представлены на рис. 5.4.

Этап 2	0	20	40	60	$z_2(s_1)$	x_2*
0	0 + 0 = **0**				0	0
20	0 + 14 = **14**	6 + 0 = **6**			14	0
40	0 + 28 = **28**	6 + 14 = **20**	23 + 0 = **23**		28	0
60	0 + 35 = **35**	6 + 28 = **34**	23 + 14 = **37**	30 + 0 = **30**	37	40

Этап 1	0	20	40	60	$z_1(s_0)$	x_1*
0	0 + 0 = **0**				0	0
20	0 + 14 = **14**	7 + 0 = **7**			14	0
40	0 + 28 = **28**	7 + 14 = **21**	23 + 0 = **23**		28	0
60	0 + 37 = **37**	7 + 28 = **35**	23 + 14 = **37**	31 + 0 = **31**	37	0 или 40

Рис. 5.4. Этапы 2 и 1.

Из таблицы этапа 1 максимальное значение $z_1(s_0)$ равно 37 при x_1*= 0 или 40.

Если x_1*= 0, то $s_1=s_0 - x_1$*= 60 – 0 = 60.

Из таблицы этапа 2 при s_1=60 находим в последнем столбце x_2*=40. Тогда $s_2=s_1 - x_2$*= 60 – 40 = 20.

Из таблицы этапа 3 при s_2=20 находим в последнем столбце x_3*=0 или 20.

Если x_3*= 0, то $s_3=s_2 - x_3$*= 20 – 0 = 20.

Из таблицы этапа 4 при s_3=20 находим в последнем столбце x_4*=20. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (0;40;0;20).

Если x_3*= 20, то $s_3=s_2 - x_3$*= 20 – 20 = 0.

Из таблицы этапа 4 при s_3=0 находим в последнем столбце x_4*=0. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (0;40;20;0).

Если x_1*= 40, то $s_1=s_0 - x_1$*= 60 – 40 = 20.

Из таблицы этапа 2 при s_1=20 находим в последнем столбце x_2*=0. Тогда $s_2=s_1 - x_2$*= 20 – 0 = 20.

Из таблицы этапа 3 при s_2=20 находим в последнем столбце x_3*=0 или 20.

Если x_3*= 0, то $s_3=s_2 - x_3$*= 20 – 0 = 20.

Из таблицы этапа 4 при s_3=20 находим в последнем столбце x_4*=20. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (40;0;0;20).

Если x_3*= 20, то $s_3=s_2 - x_3$*= 20 – 20 = 0.

Из таблицы этапа 4 при s_3=0 находим в последнем столбце x_4*=0. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (40;0;20;0).

Задание на лабораторную работу:

1. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить схему вычисления, реализующую метод, и найти решение.
2. Оформить отчет о выполнении задания с приведением условия задачи, формул для расчета, результатов решения и заключения.

Варианты заданий

Распределить оптимальным образом денежные средства в размере 5 млн. руб. между тремя предприятиями при заданных значениях функции эффективности.

Вариант 1

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2,4	3,5	4	5	5,6
$g_2(x)$	0	2	3	4,2	5,3	5,8
$g_3(x)$	0	3,1	3,3	4,2	6	6,1

Вариант 6

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	3,1	3,4	4	4,5	5,2
$g_2(x)$	0	3,5	4	4,5	5	5,9
$g_3(x)$	0	4,1	4,3	5,1	6	6,1

Вариант 2

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	4,4	4,7	4,9	5	5,2
$g_2(x)$	0	4,7	4,9	5,4	5,4	6,4
$g_3(x)$	0	4	4,5	5,1	6	6,2

Вариант 3

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	0,2	0,6	1,5	2,4	4,4
$g_2(x)$	0	1	1,5	2	3	4,9
$g_3(x)$	0	1,5	2,2	3,4	4	5,1

Вариант 4

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2	2,3	2,9	3,7	4,5
$g_2(x)$	0	1,6	2	2,7	4	5,1
$g_3(x)$	0	2,2	2,8	3,5	3,8	5,4

Вариант 5

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2,1	2,4	2,9	3,5	4,4
$g_2(x)$	0	3	3,2	4	4,2	5
$g_3(x)$	0	3,1	4	4,7	5	6

Вариант 7

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2,3	4,5	6	8,7	9,5
$g_2(x)$	0	1,9	3,8	5	6,8	8
$g_3(x)$	0	4	5	5,4	7,2	9

Вариант 8

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	1,2	1,6	3,4	4	5,2
$g_2(x)$	0	0,8	1,3	2	3,6	4,9
$g_3(x)$	0	0,5	1	2,3	2,9	4,1

Вариант 9

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	4,2	4,9	5,7	6,4	7,8
$g_2(x)$	0	3,4	3,9	5	7	8,3
$g_3(x)$	0	4	6	6,5	8	9,4

Вариант 10

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	1	2,4	2,6	3,4	4,2
$g_2(x)$	0	2,1	3	4,2	4,9	5
$g_3(x)$	0	2,6	3,5	4	4,7	5,4

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6.

Критерии принятия решений

<u>Цель работы</u> – изучение особенностей применения критериев принятия решений.

Основные сведения

Критерий принятия решений − это функция, выражающая предпочтения лица принимающего решения (ЛПР) и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Задача принятия решений возникает тогда, когда возникает несколько конкурирующих вариантов решения. В противном случае ситуация предопределена. Варианты решений возникают в результате анализа проблемной ситуации, представленной в виде описательной модели. В классическом случае описание ситуации дается в виде матрицы, строки которой соответствуют вариантам решений, а столбцы − факторам, которые могут повлиять на результат, получаемый ЛПР. На пересечении столбцов и строк расположены либо проигрыши, соответствующие реализациям решений E_i в соответствующих условиях F_j, либо, наоборот, выигрыши.

Рассмотрим простейший случай одностолбцовой матрицы.

Предположим, что у нас имеются варианты решений E_1, E_2,..., E_n, которые характеризуются некоторым результатом e_i.

Такой результат можно интерпретировать как выигрыш, полезность, надежность. Нам необходимо найти $\max_i(e_i)$.

Таким образом, выбор оптимального варианта производится с помощью критерия

$$E_o = \left\{ E_i \middle| E_i \in E \;\&\; e_i = \max_i(e_i) \right\} \quad . \qquad (1)$$

Это правило выбора читается следующим образом: множество E_o оптимальных вариантов состоит из тех вариантов E_i, которые принадлежат множеству E всех вариантов и оценка e_i которых максимальна среди всех оценок $\{e_i\}$. (Логический знак & читается как "и" и требует, чтобы оба связываемых им утверждения были истинны.)

Такая постановка задачи, как было сказано выше, соответствует простому случаю.

В более сложных структурах каждому допустимому варианту решения E_i по многим причинам могут соответствовать различные внешние условия (состояния) F_j и, как следствие, различные результаты e_{ij} реализации решений.

Под результатом решения e_{ij} здесь будем понимать численную оценку, соответствующую варианту E_i и условиям F_j и характеризующую экономический эффект (прибыль), полезность или потребительную стоимость. Будем называть такой результат эффективностью решения.

Таким образом, ситуация ПР описывается некоторой матрицей (табл. 1). Размерность этой матрицы зависит от множества вариантов решений и множества рассматриваемых факторов или условий, влияющих на принятие решений.

Таблица 6.1.

Матрица решений $|e_{ij}|$

	F_1	F_2	…	F_m
E_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1m}
E_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2m}
…	...	...	...	...
E_n	e_{n1}	e_{n2}	...	e_{nm}

В данном случае, так же как и в простейшем, описанном выше, ЛПР старается выбрать решение с наилучшим результатом. Однако, поскольку ему неизвестно, с какими условиями он столкнется, он вынужден принимать во внимание все численные оценки e_{ij}, соответствующие варианту E_i. Первоначальная задача максимизации $\max\limits_i(e_i)$ согласно критерию (1) должна быть теперь заменена другой, подходящим образом учитывающей все последствия любого из вариантов решения E_i.

Для того, чтобы получить более ясную и наглядную интерпретацию перейдем к графическому представлению оценочных функций. Случай с двумя внешними условиями (m=2) при n вариантах решений будет простейшим. Результат такого рассмотрения можно распространить на случай большего количества внешних факторов (условий).

Введем прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс значения результата e_{i1} решения E_i, соответствующего внешнему состоянию F_1, а по оси ординат − значения e_{i2}, соответствующего состоянию F_2, i=1,...,n. При таких обозначениях каждый вариант решения E_i соответствует точке на плоскости с координатами (e_{i1},e_{i2}), i=1,..,n соответственно. Все точки образуют множество, которое можно вписать в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, расположение которых соответствует максимальным и минимальным значениям среди всех элементов матрицы. Точку с координатами (max(e_{i1},i), max(e_{i2},i)), соответствующей верхнему правому углу, мы назовем *утопической точкой* (УТ). Смысл этого названия в том, что координаты всех точек (e_{i1},e_{i2}), i=1,..,n, соответствующих вариантам решений E_1,..., E_n, не могут быть больше, чем у утопической точки.

Аналогичное значение имеет и так называемая антиутопическая точка (АУТ), имеющая координаты ($minx$(e_{i1},i), min(e_{i2},i)), соответствующая нижнему левому углу. Координаты всех точек (e_{i1},e_{i2}), i=1,..,n, соответствующих вариантам решений E_1,..., E_n, не могут быть меньше, чем у точки АУТ. Построенный прямоугольник называется *полем полезности решений* (рис. 1).

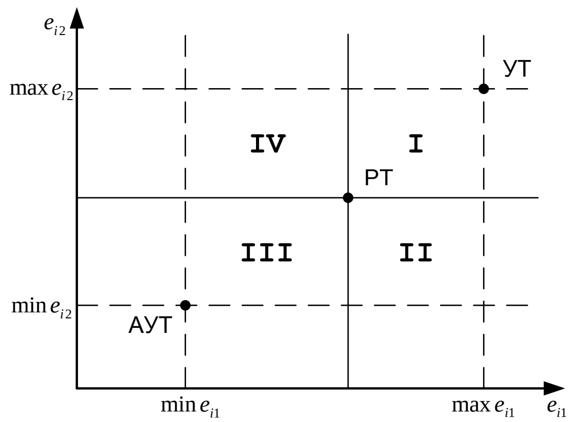


Рис. 6.1. Поле полезности решений

Рассмотрим это поле подробнее. Выберем произвольную точку на плоскости и назовем ее рабочей точкой (РТ) − $E_{\text{рт}}$. Обозначим ее координаты ($e_{\text{рт}1}$,$e_{\text{рт}2}$). С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем плоскость на четыре части и обозначим их I, II, III и IV. В рассматриваемом нами двумерном случае каждая из этих частей имеет вид квадранта; в случае произвольной размерности они превращаются в так называемые *конусы*.

Все точки E_i из матрицы вариантов решений, лежащие в конусе I заведомо или гарантировано лучше, чем рассматриваемая точка РТ. Это преимущество решений из конуса I по отношению к решению, находящемуся в РТ не зависит от того, какой фактор − F_1 или F_2 реализуется, то есть не важно по какой координате это преимущество реализуется. Поэтому мы называем конус I *конусом предпочтения*.

Соответственно все точки конуса III хуже точки РТ ($e_{\text{рт}1}>=e_{i1}$ и $e_{\text{рт}2}>=e_{i2}$), и мы будем называть область III *антиконусом*. Таким образом, оценка качества точек из этих двух конусов в сравнении с точкой РТ проста и однозначна.

Оценка же точек в отмеченных штриховкой конусах II и IV является неопределенной, так как соотношения их координат с PT является противоречивым. Вследствие этого их называют *областями неопределенности* и варианты решений в этих конусах связаны с допущением некоторого риска принятия решений.

Таким образом, критериальные функции, лежащие внутри конуса I обеспечивают гарантированный результат и могут считаться безрисковыми (пессимистическими) критериями ПР. Линии, проходящие через II и IV квадранты, соответствуют критериям с риском.

И, наконец, линии, лежащие внутри III конуса соответствуют критерию азартного игрока или оптимистичной позиции. Рассмотрим линии, соответствующие трем группам критериев (рис. 6.2).

Все точки из областей неопределенности, лежащие справа и выше каждой линии функций предпочтения лучше точек, лежащих слева и ниже. Всякая функция (линия) предпочтения объединяет все точки, соответствующие одному и тому же значению критерия (точки равной эффективности); справа и выше ее располагаются все лучшие точки, то есть точки более эффективных решений, а слева и ниже − худшие, то есть точки менее эффективных решений.

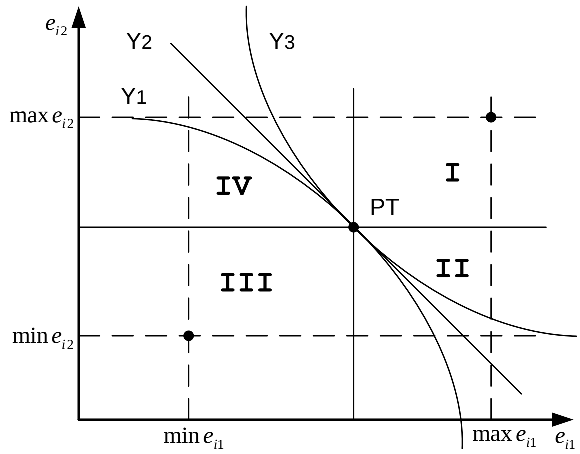


Рис. 6.2. Функции предпочтения при принятии решений
Y_1 – азартного игрока (оптимистические);
Y_2 – критериев с риском (нейтральные);
Y_3 – безрисковые (пессимистические).

Таким образом, критериальная функция делит плоскость на две части. В соответствии с рассмотренным полем полезности, критериальные функции, проходящие ближе к границам I квадранта соответствуют безрисковой политике принятия решения или тенденции избегания риска, как например, вогнутая штриховая линия на рисунке 2. Линии, проходящие через квадрант III, соответствуют азартной стратегии с максимальным риском. Соответственно, прямая линия, проходящая через рабочую точку и квадранты II и IV, соответствует нейтральной или объективной стратегии в ПР.

Если выбор оценочной функции отдается на усмотрение ЛПР, то приходится считаться с возможностью различных результатов для одного и того же решения. Таким образом, принятие решения не есть чисто рациональный процесс. Опасность возникает в тех случаях, когда критериальные оценочные функции выбираются интуитивно, иногда даже без выяснения исходной позиции лица принимающего решения.

Всякое техническое или экономическое решение в условиях неполной информации − сознательно или неосознанно − принимается в соответствии с какой-либо оценочной функцией описанного выше типа. Как только это бывает признано явно, следствия соответствующих решений становятся лучше обозримыми, что позволяет улучшить их качество. При этом выбор оценочных функций всегда должен осуществляться с учетом количественных характеристик ситуации, в которой принимаются решения.

Следующие критерии относят к классическим:

– минимаксный Вальда $Z_{MM} = \max_i \left(\min_j \left(e_{ij} \right) \right)$;

– Байеса-Лапласа $Z_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} e_{ij} q_j \right)$;

– Сэвиджа $Z_S = \min_i \left(\max_j \left(\max_i \left(e_{ij} \right) - e_{ij} \right) \right)$;

– расширенный минимаксный $Z_{ME} = \max_p \left(\min_q \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} p_i q_j \right) \right)$;

К производным критериям относят следующие:

– критерий Гурвица $Z_{HW} = \max_i \left(c \cdot \min_j \left(e_{ij} \right) + (1-c) \cdot \max_j \left(e_{ij} \right) \right)$;

Классические критерии принятия решений
Минимаксный критерий Вальда принятия решений
Аналитический метод расчета

Математическая интерпретация критерия выглядит следующим образом:

$$Z_{MM} = \max_i \left(\min_j \left(e_{ij} \right) \right).$$

Процесс нахождения оптимального решения рассмотрим на примере.

Заданная матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1.

Выбираем минимальное значение в каждой строке.

	F_1	F_2	$\min_j \left(e_{ij} \right)$
E_1	1	1	1
E_2	3	3	3
E_3	7	1	1
E_4	2	2	2
E_5	3	1	1
E_6	4	4	4
E_7	5	1	1
E_8	4	2	2

E_9	5	3	3
E_{10}	6	2	2

Шаг 2.

Выбираем максимальное значение в добавленном столбце ($\min_j(e_{ij})$).

	F_1	F_2	$\min_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1
E_2	3	3	3
E_3	7	1	1
E_4	2	2	2
E_5	3	1	1
$\boldsymbol{E_6}$	**4**	**4**	**4**
E_7	5	1	1
E_8	4	2	2
E_9	5	3	3
E_{10}	6	2	2
			4

Соответственно оптимальными решениями являются все решения, значения $\min_j(e_{ij})$ которых равны 4. В данном случае имеем одно решение – E_6.

Критерий Байеса–Лапласа
Аналитический метод расчета

Математическая интерпретация критерия выглядит следующим образом:

$$Z_{BL} = \max_i\left(\sum_{j=1}^{m} e_{ij} q_j\right).$$

где q_j – вероятности условий. Если q_j не заданы, то считаем, что условия равновероятны: q_1 = q_2 = 0,5.

Процесс нахождения оптимального решения рассмотрим на примере.

Заданная матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1.

Находим произведение e_{ij} и соответствующей вероятности q_j в каждой строке.

	F_1	F_2	$e_{i1}q_1$	$e_{i2}q_2$
E_1	1	1	0,5	0,5
E_2	3	3	1,5	1,5
E_3	7	1	3,5	0,5

E_4	2	2	1	1
E_5	3	1	1,5	0,5
E_6	4	4	2	2
E_7	5	1	2,5	0.5
E_8	4	2	2	1
E_9	5	3	2,5	1.5
E_{10}	6	2	3	1

Шаг 2.

Находим сумму значений $e_{i1}q_1$ и $e_{i2}q_2$ для каждой строки.

	F_1	F_2	$e_{i1}q_1$	$e_{i2}q_2$	$\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$
E_1	1	1	0,5	0,5	1
E_2	3	3	1,5	1,5	3
E_3	**7**	**1**	**3,5**	**0,5**	**4**
E_4	2	2	1	1	2
E_5	3	1	1,5	0,5	2
E_6	**4**	**4**	**2**	**2**	**4**
E_7	5	1	2,5	0.5	3
E_8	4	2	2	1	3
E_9	**5**	**3**	**2,5**	**1.5**	**4**
E_{10}	**6**	**2**	**3**	**1**	**4**
					4

Шаг 3.

Находим максимальное значение в добавленном столбце $\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$.

Соответственно оптимальными решениями являются все решения, значения $\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$ которых равны 4. В данном случае имеем четыре решения – E_3, E_6, E_9, E_{10}.

Критерий Сэвиджа

Аналитический метод расчета

Математическая интерпретация критерия выглядит следующим образом:

$$Z_S = \min_i \left(\max_j \left(\max_i \left(e_{ij} \right) - e_{ij} \right) \right).$$

Процесс нахождения оптимального решения рассмотрим на примере.

Заданная матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1. Находим максимальное значение в каждом из столбцов.

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2
	7	4

Шаг 2.

Каждый элемент матрицы решений вычитается из наибольшего результата соответствующего столбца. Эти разности образуют матрицу остатков.

	F_1	F_2
E_1	6	3
E_2	4	1
E_3	0	3
E_4	5	2
E_5	4	3
E_6	3	0
E_7	2	3
E_8	3	2
E_9	2	1
E_{10}	1	2
	7	4

Шаг 3.

Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей $e_{ir} = \max\limits_j\left(\max\limits_i\left(e_{ij}\right) - e_{ij}\right)$:

	F_1	F_2	e_{ir}
E_1	6	3	6
E_2	4	1	4
E_3	0	3	3
E_4	5	2	5
E_5	4	3	4
E_6	3	0	3
E_7	2	3	3
E_8	3	2	3
$\boldsymbol{E_9}$	**2**	**1**	**2**
$\boldsymbol{E_{10}}$	**1**	**2**	**2**
			2

Выбираются те решения E_i, в строках которых стоит наименьшее значение для этого столбца. Соответственно оптимальными решениями являются все решения, значения e_{ir} которых равны 2. В данном случае имеем два решения – E_9 и E_{10}.

Критерий принятия решений Гурвица

Математическая интерпретация

$$Z_{HW} = \max_i (c \min_j (e_{ij}) + (1-c) \max_j (e_{ij})) .$$

Аналитический метод расчета

Дана матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1. Выбираем минимальное и максимальное значение в каждой строке.

	F_1	F_2	$\min_j (e_{ij})$	$\max_j (e_{ij})$
E_1	1	1	1	1
E_2	3	3	3	3
E_3	7	1	1	7
E_4	2	2	2	2
E_5	3	1	1	3
E_6	4	4	4	4
E_7	5	1	1	5
E_8	4	2	2	4
E_9	5	3	3	5
E_{10}	6	2	2	6

Шаг 2. Выбираем значение коэффициента c. В технических приложениях правильно выбрать множитель с бывает так же трудно, как правильно выбрать критерий. Вряд ли возможно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего весовой множитель c=0,5 без возражений принимается в качестве некоторой «средней» точки зрения. Для нашего примера примем c=0,4.

Шаг 3. Домножаем $\min_j (e_{ij})$ на c, $\max_j (e_{ij})$ на (1-c).

	F_1	F_2	$\min_j (e_{ij})$	$\max_j (e_{ij})$	$c \min_j (e_{ij})$	$(1-c) \max_j (e_{ij})$
E_1	1	1	1	1	0,4	0,6
E_2	3	3	3	3	1,2	1,8
E_3	7	1	1	7	0,4	4,2
E_4	2	2	2	2	0,8	1,2
E_5	3	1	1	3	0,4	1,8
E_6	4	4	4	4	1,6	2,4
E_7	5	1	1	5	0,4	3
E_8	4	2	2	4	0,8	2,4
E_9	5	3	3	5	1,2	3
E_{10}	6	2	2	6	0,8	3,6

Шаг 4. Находим сумму $c\min_j(e_{ij})$ и $(1-c)\max_j(e_{ij})$.

	F_1	F_2	$\min_j(e_{ij})$	$\max_j(e_{ij})$	$c\min_j(e_{ij})$	$(1-c)\max_j(e_{ij})$	$c\min_j(e_{ij})+(1-c)\max_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1	1	0,4	0,6	1
E_2	3	3	3	3	1,2	1,8	3
$\mathbf{E_3}$	**7**	**1**	**1**	**7**	**0,4**	**4,2**	**4,8**
E_4	2	2	2	2	0,8	1,2	2
E_5	3	1	1	3	0,4	1,8	2,2
E_6	4	4	4	4	1,6	2,4	4
E_7	5	1	1	5	0,4	3	3,4
E_8	4	2	2	4	0,8	2,4	3,2
E_9	5	3	3	5	1,2	3	4,2
E_{10}	6	2	2	6	0,8	3,6	4,4
							4,8

Шаг 5.

Находим максимум из столбца $c\min_j(e_{ij})+(1-c)\max_j(e_{ij})$. Оптимальное решение: все решения для которых $c\min_j(e_{ij})+(1-c)\max_j(e_{ij})$ максимально. В нашем случае это E_3.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта получите задание.

2. Аналитическим и геометрическим методами расчета проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию на основе:

1) минимаксного критерия Вальда;

2) критерия Байеса-Лапласа при заданном распределении вероятностей состояний спроса $P=(p_1,p_2)$;

3) критерия минимального риска Сэвиджа;

4) критерия Гурвица при заданном значении λ;

3. Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- аналитический метод расчета по каждому выше указанному критерию с использованием функций Excel;
- геометрический метод расчета по каждому выше указанному критерию с построением графиков в Excel;
- оптимальную стратегию.

Варианты заданий

Магазин может завезти в различных пропорциях товары трех типов в соответствии с возможными стратегиями A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8. Их реализация и прибыль магазина зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагается, что спрос может иметь два состояния P_1, P_2. Задана матрица, элементы которой a_{ij} характеризуют прибыль магазина в случае, если его администрация руководствуется стратегией A_i, а спрос принимает состояние P_j.

1.	P_1	P_2
A_1	0	6
A_2	4	5
A_3	6	1
A_4	2	3
A_5	3	4
A_6	−1	2
A_7	5	2
A_8	4	6

$P=(0{,}2;p_2)$ $\lambda=0{,}6$

4.	P_1	P_2
A_1	0	12
A_2	8	10
A_3	12	1
A_4	4	6
A_5	6	8
A_6	−1	2
A_7	4	1
A_8	2	1

$P=(0{,}6;p_2)$ $\lambda=0{,}7$

7.	P_1	P_2
A_1	10	6
A_2	14	4
A_3	20	−2
A_4	8	6
A_5	0	−2
A_6	−8	4
A_7	−6	−8
A_8	4	2

$P=(0{,}3;p_2)$ $\lambda=0{,}6$

2.	P_1	P_2
A_1	8	4
A_2	−2	1
A_3	6	3
A_4	5	6
A_5	4	2
A_6	−1	7
A_7	2	4
A_8	3	1

$P=(0{,}3;p_2)$ $\lambda=0{,}7$

5.	P_1	P_2
A_1	4	6
A_2	10	7
A_3	2	4
A_4	5	−4
A_5	9	15
A_6	6	−3
A_7	4	1
A_8	2	1

$P=(0{,}7;p_2)$ $\lambda=0{,}6$

8.	P_1	P_2
A_1	8	2
A_2	6	4
A_3	9	−2
A_4	3	2
A_5	−1	−3
A_6	−5	1
A_7	3	1
A_8	−2	1

$P=(0,4;p_2)$ $\lambda=0,5$

3.	P_1	P_2
A_1	−2	1
A_2	0	2
A_3	−2	−3
A_4	−4	2
A_5	−3	−1
A_6	−5	3
A_7	−1	−2
A_8	0	1

$P=(0,4;p_2)$ $\lambda=0,5$

6.	P_1	P_2
A_1	2	3
A_2	6	4
A_3	9	2
A_4	4	4
A_5	5	7
A_6	0	1
A_7	3	2
A_8	2	1

$P=(0,2;p_2)$ $\lambda=0,5$

9.	P_1	P_2
A_1	−2	1
A_2	−2	−3
A_3	0	2
A_4	−4	2
A_5	−5	3
A_6	−3	−1
A_7	1	0
A_8	−1	1

$P=(0,6;p_2)$ $\lambda=0,7$

10.	P_1	P_2
A_1	5	3
A_2	7	2
A_3	10	−1
A_4	4	3
A_5	0	−2
A_6	−4	2
A_7	2	−1
A_8	3	1

$P=(0,2;p_2)$ $\lambda=0,6$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7-8.

Принятие решений в условиях риска. Деревья решений

Цель работы – научиться строить деревья решений, уметь использовать надстройку TreePlan, создающую деревья в электронных таблицах; изучить подходы решения: использование новой информации в процессе принятия решений и анализ моделей последовательных решений.

Часть 1. Создание дерева решений

Основные сведения

Деревья решений – это графическое средство анализа решений в условиях риска. Деревья решений создаются для использования в моделях, в которых принимается *последовательность* решений, каждая из которых ведет к некоторому результату (выходу модели). Например, концессионеры решают, сколько заявок послать на региональные торги. Но результат этого решения не определен, пока они не решат, в каких торгах участвова. Только после этого можно решить, на какие суммы посылать заявки. Но и после этого результат, если его рассматривать как доход от торгов, не определен, поскольку не известен спрос на их товар.

Дальнейший материал будет проиллюстрирован на модели принятия решений для фирмы Sonorola, которая занимается производством мобильных телефонов.

В фирме Sonorola заканчивается этап разработки и тестирования нового ряда моделей мобильных телефонов. Высшее руководство фирмы разрабатывает стратегию производства и продвижения на рынок этих моделей телефонов. Рассматриваются три основные стратегии (решения).

1. *Агрессивная стратегия*. Эта стратегия в наибольшей степени соответствует ожиданиям фирмы от разработанного ряда моделей. Основные капитальные вложения будут сделаны в разработку нового и эффективного производственного оборудования. Большие инвестиции должны гарантировать продвижение на рынок всех разработанных моделей телефонов. Маркетинговая компания предусматривает покупку рекламного времени на телевидении всех основных мировых рынков и скидки для дилеров.

2. *Базовая стратегия*. Производство текущих моделей телефонов переносится из Токио в Осаку. что, очевидно, вызовет "головную боль" у руководства фирмы. В то же время существующая производственная линия в Токио модернизируется и переналаживается для производства новых моделей телефонов. Значительные инвестиции будут сделаны для продвижения на рынок только наиболее популярных моделей. Фирма рассчитывает на проведение локальных и региональных рекламных компаний, не выходя на глобальный уровень рекламной компании.

3. *Осторожная стратегия*. При этой стратегии для производства новых моделей телефонов будут использоваться только "излишки" производственных мощностей, задействованные в настоящее время для производства текущих моделей телефонов. Модернизация производственных средств сведена до минимума. Объем производства новых телефонов ограничен спросом. Рекламные материалы рассылаются выборочно региональным дилерам.

Руководство фирмы решило оценивать ситуацию на рынке мобильных телефонов (т.е. спрос на их продукцию) по двум градациям; как благоприятную и как неблагоприятную. (Конечно, в реальности спрос является непрерывной величиной, но для простоты мы ограничимся двумя состояниями рынка: благоприятным и неблагоприятным.)

Рассмотренную модель можно также представить в виде дерева решений, как будет показано ниже. Введем некоторые определения для деревьев решений. *Узел решении* (обозначается квадратиком, в TreePlan называется decision node) соответствует точке, в которой принимаются решения; каждая линия, выходящая из квадратика, соответствует какому-нибудь решению. *Узел событий* (обозначается кружочком, в TreePIan называется event node) соответствует ситуации, в которой выход модели не определен. Линии, выходяшие из кружочка, представляют соответствующие выходы модели. Термин *ветви* (branches в TreePlan) обозначает линии, соединяющие узлы любых типов.

Дерево решений – прекрасный способ визуализации взаимосвязей между принимаемыми решениями и случайными событиями, от которых зависят результаты решений. Но, чтобы с помощью дерева решений найти оптимальное решение, необходимо на диаграмму дерева добавить числовые значения для каждого конечного узла. Эти значения в TreePlan называются *конечными значениями* (terminal value). Необходимо также задать вероятности для каждой ветви, исходящей из узлов событий. На основе построенного дерева решений находится оптимальное решение. Надстройка TreePlan выполняет необходимые для этого вычисления автоматически. Эти вычисления выполняются в обратном порядке, начиная не с корневого узла, а с конечных узлов событий, для которых вычисляются ожидаемые значения (такой процесс вычислений называется *обратным пересчетом*).

Пример выполнения работы

На рис. 7.1 представлена рабочая книга (называется Sonorola), в которую введены таблицы платежей и оценки вероятностей состояния рынка. Значения платежей измеряются в миллионах долларов и вычисляются с учетом объемон продаж, цен и прибыли, рассчитанных для всех комбинаций решений (стратегий) и состояний природы (состояний рынка). Интересно отметить, что осторожная стратегия дает наибольший доход в услониях неблагоприятного рынка, а агрессивная – в условиях благоприятного. Однако оптимальным решением, найденным в соответствии с критерием максимизации ожидаемого результата, является базовая стратегия, дня которой ожидаемое значение платежей составляет $12,85 млн. (см. данные в столбце D на рис. 7.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Вероятности**	0,45	0,55						
2									
3		**Состояния природы**							
4	**РЕШЕНИЕ**	*Благоприятное (Б)*	*Неблагоприятное (Н)*	**Ожидаемый результат**					
5	*Агрессивное (А)*	30	-8	**9,1**	=	СУММПРОИЗВ(B5:C5;$B$1:$C$1)			
6	*Базовое (В)*	20	7	**12,85**	=	СУММПРОИЗВ(B6:C6;$B$1:$C$1)			
7	*Осторожное (С)*	5	15	**10,5**	=	СУММПРОИЗВ(B7:C7;$B$1:$C$1)			

Рис. 7.1. Данные модели принятия решений для фирмы Sonorola

Опишем последовательность действий, необходимых для создания дерева решений для модели фирмы Sonorola.

1. Установите табличный курсор в ячейке A10 и выполните команду Сервис→Decision Tree. (Если в меню Сервис нет команды Decision Tree, значит, надстройка TreePlan еще не установлена. Чтобы ее установить, выполните команду Сервис→Надстройки, в диалоговом окне Надстройки щелкните на кнопке Обзор и найдите файл TREEPLAN.XLA на своем жестком диске (или в сети). Дважды щелкните на найденном файле TREEPLAN.XLA, затем на кнопке ОК в окне Надстройки. Команда Decision Tree появится в меню Сервис.)

2. В открывшемся диалоговом окне TreePlan New щелкните на кнопке New Tree (Новое дерево). Программа по умолчанию нарисует простое дерево с одним узлом решений и двумя исходящими из него ветвями.

3. Поскольку Sonorola имеет три стратегии-решения, необходимо добавить еще одну ветвь. Для этого нажмите комбинацию клавиш <Ctrl+t>, которая вызывает контекстное меню TreePlan.

4. В открывшемся диалоговом окне TreePlan Decision щелкните на переключателе Add branch (Добавить ветвь), а затем – на кнопке ОК.

5. В ячейках рабочего листа, в которых сейчас для ветвей записаны метки Decision 1, Decision 2 и Decision 3 (Решение 1, Решение 2 и т.д.), задаваемые TreePlan поумолчанию, введите названия Агрессивное, Базовое и Осторожное.

6. Далее надо заменить конечные узлы, которыми заканчиваются ветви, узлами событий. Для этого щелкните на конечном узле (точнее, на ячейке рабочего листа, где заканчивается ветвь) и нажмите комбинацию клавиш <Ctrl+t>. Откроется диалоговое окно TreePlan Terminal, показанное на рис. 7.2.

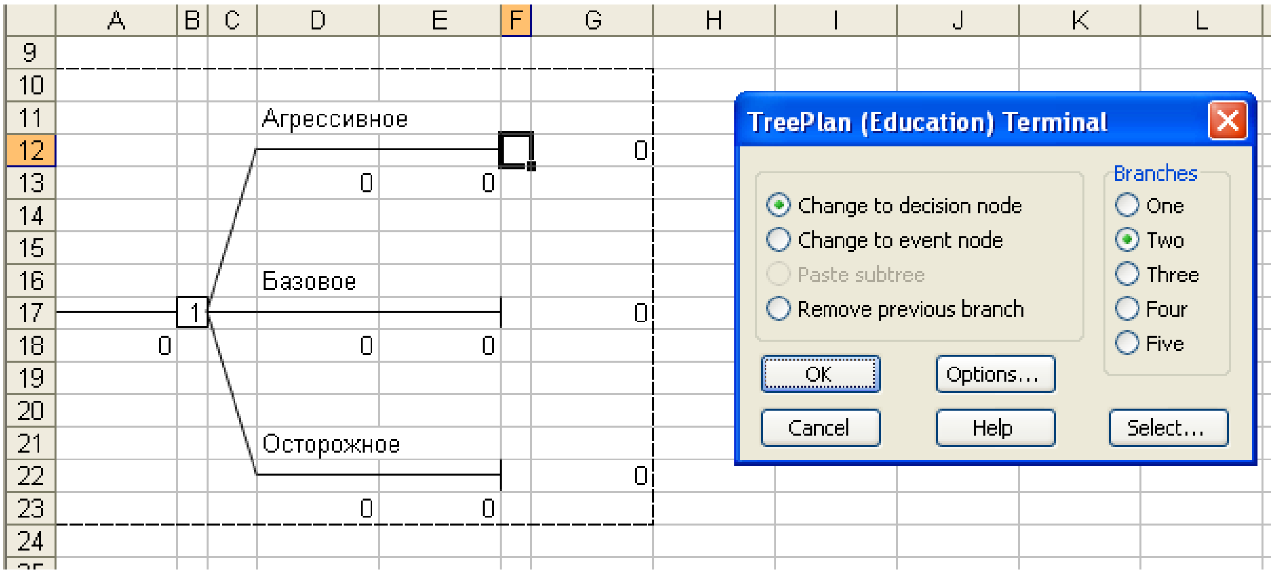


Рис. 7.2. Добавление узла событий к дереву решений

7. Щелкните сначала на переключателе Change to event node (Изменить на узел событий), затем в области Branches (Ветви) установите переключатель Two (Два), указывая тем самым, что надо вставить узел событий с двумя ветвями. Затем щелкните на кнопке OK.

8. TreePlan добавит к дереву новый узел, как показано на рис. 7.3. Отметим, что каждому событию по умолчанию присваивается вероятность 0,5 и даются имена (в данном случае Event 4 и Event 5 (События 4 и 5)).

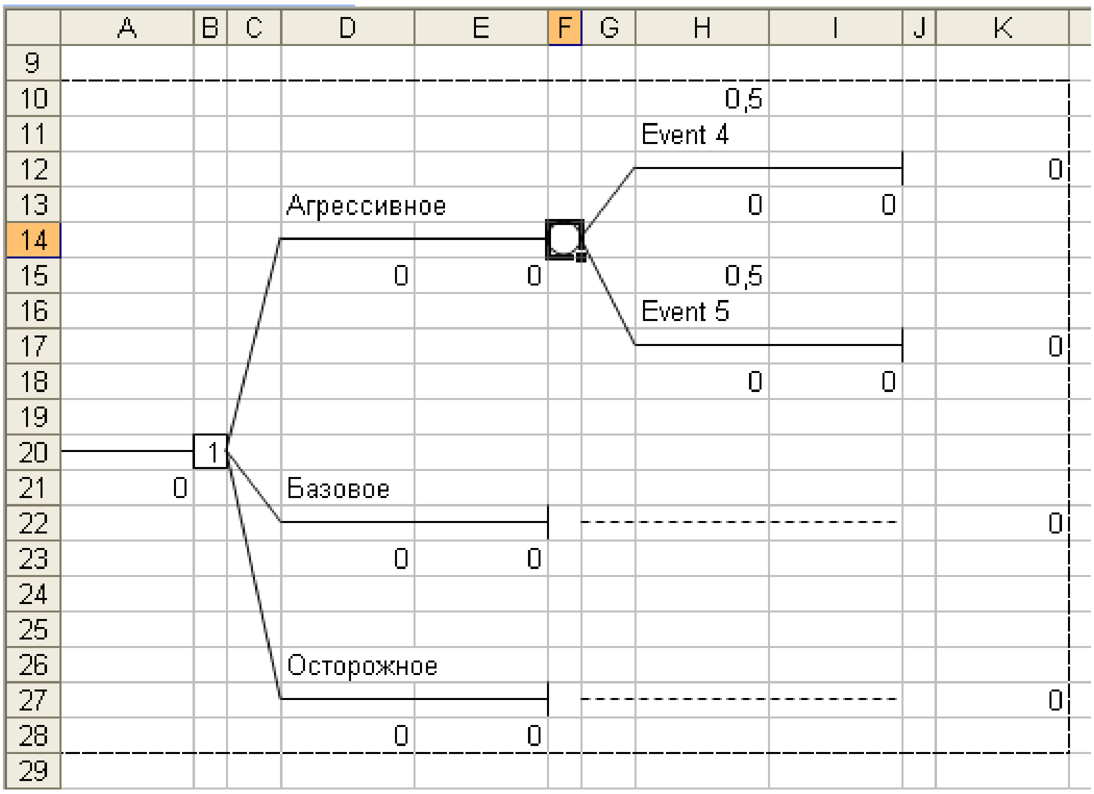


Рис. 7.3. Часть дерева решений для модели Sonorola

9. Измените названия событий Event 4 и Event 5 на Благоприятное и Неблагоприятное.

Замечание. Теперь надо повторить п. 6-9 для того, чтобы заменить два других конечных узла узлами событий. Однако TreePlan имеет средство копирования узлов (и частей деревьев), которым мы сейчас воспользуемся.

10. Чтобы скопировать узел (или часть дерева), щелкните на ячейке, содержащей этот узел, и нажмите <Ctrl+t>.

11. В окне TreePlan Event шелкните на переключателе Copy subtree (Копировать поддерево) и затем на кнопке ОК.

12. Шелкните на ячейке, в которую хотите скопировать узел (в данном случае конечный узел, которым заканчивается ветвь от решения Базовая), нажмите <Ctrl+t>. В открывшемся окне TreePlan Terminal щелкните на переключателе Paste subtree (Вставить поддерево) и затем на кнопке ОК.

13. Повторите последние действия (п. 10-12) для последнего конечного узла.

14. В результате описанных действий вы получите дерево, подобное показанному на рис. 7.4.

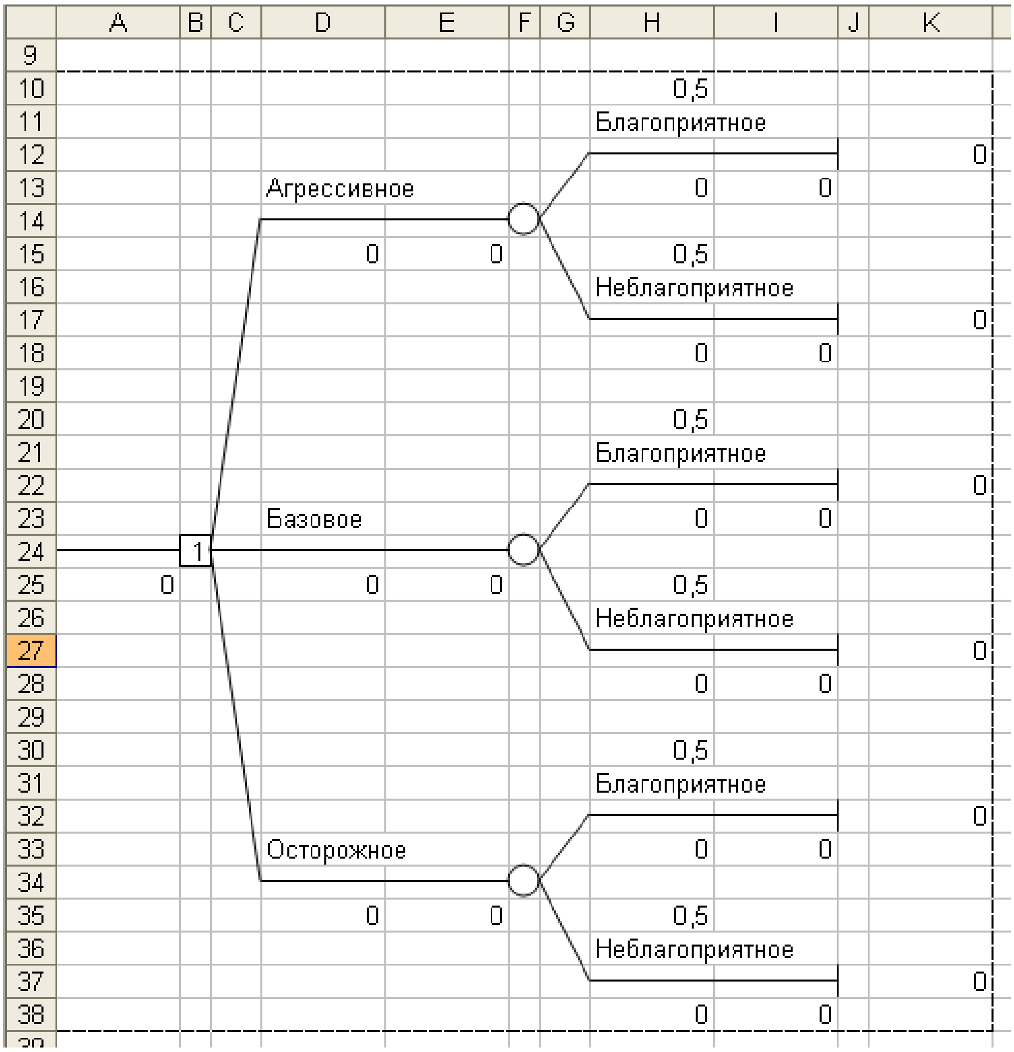


Рис. 7.4. Дерево решений для модели Sonorola

15. В ячейках H10 и HI5 замените значения вероятностей 0,5, заданных TreePlan по умолчанию, формулами **=B1** (даст значение 0,45) и **=C1** (даст значение 0,55) соответственно. Аналогичные изменения сделайте в ячейках H20, H25, H30 и H35. (Отметим, что если сумма вероятностей, приписанных ветвям, исходяшим из одного узла события, не равняется единице, то вместо значения ожидаемого результата для узла

события в ячейке, расположенной слева от этого узла, появится сообщение об ошибке #Н/Д, что указывает на необходимость изменения значения вероятностей.)

16. Измените значения для ветвей, которые в TreePlan по умолчанию установлены нулевыми. Например, в ячейке H13 (соответствует комбинации агрессивной стратегии и благоприятному состоянию рынка) введите формулу **=B5** (соответствует платежу $30 млн. в таблице платежей на рис. 12.1). Далее в ячейку H18 (соответствует комбинации агрессивной стратегии и неблагоприятному состоянию рынка) введите формулу **=C5** (соответствует платежу –30 в таблице платежей). Подобным образом в ячейки H23. H28, H33 и H38 введите формулы =B6, =C6, =B7 и =C7 соответственно.

Дерево решений после ввода значений и вероятностей показано на рис. 7.5.

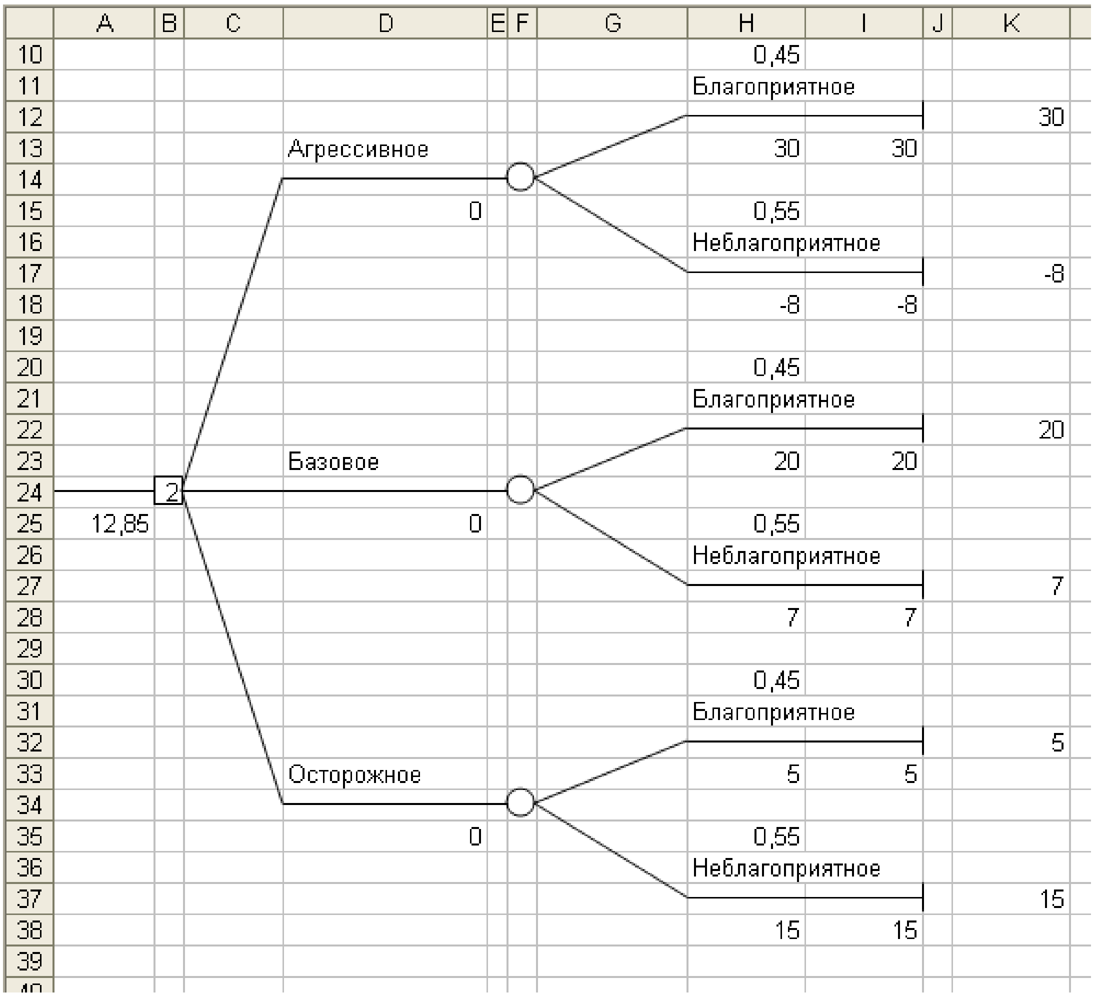


Рис. 7.5. Законченное дерево решений для модели Sonorola

Отметим, что вычисленные ожидаемые значения для узлов событий (см. рис. 7.5) совпадают с ожидаемыми результатами для соответствующих решений, которые показаны на рис. 7.1. Теперь менеджер должен просто выбрать решение, которому соответствует наибольшее ожидаемое решение. В данном случае это будет решение 2 (базовая стратегия), на что указывает и TreePlan, поместив цифру 2 (вторая ветвь) в ячейку B24 узла решений.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта получите модель.

2. Найдите оптимальное решение в соответствии с критерием максимизации ожидаемого результата.

3. Постройте дерево решений.

4. Покажите преподавателю результаты своих построений и расчетов.

5. Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- оптимальное решение, найденное в соответствии с критерием максимизации ожидаемого результата;
- дерево решений.

Варианты заданий

Вариант 1.

Компания Kelly Construction хочет принять участие в строительстве студенческих общежитий. Для этого компания должна сначала выкупить участок земли, на котором можно построить комплекс на 100, 200 или 300 жилых модулей. В строительстве участвуют многие компании, причем строительство их комплексов находится на разных стадиях готовности. Поэтому в настоящий момент очень сложно прогнозировать спрос на студенческое жилье. В таблие приведены возможные платежи компании Kelly Construction для разных уровней спроса. Пусть вероятность низкого спроса равна 0,3, среднего спроса – 0,5 и высокого – 0,2. С помощью дерева решений найдите оптимальную стратегию для компании.

Решение	Спрос		
	Низкий	Средний	Высокий
Строить 100 модулей	400000	400000	400000
Строить 200 модулей	100000	800000	800000
Строить 300 модулей	–200000	500000	1200000

Вариант 2.

Дана таблица платежей

Акции	Состояния экономики		
	Неблагоприятное	Благоприятное	Отличное
IBM	10	15	18
T	5	15	20
Q	–15	25	45
WFT	–15	0	15

Какие акции принесут наибольший ожидаемый доход, если предположить, что вероятность неблагоприятного состояния экономики равна 0,1, благоприятного – 0,5, а отличного – 0,4.

Вариант 3.

Допустим, у вас имеется возможность вложить деньги в три инвестиционных фонда открытого типа: простой, специальный (обеспечивающий максимальную долгосрочную прибыль от акции мелких компаний) и глобальный. Прибыль от инвестиции может измениться в зависимости от условий рынка. Существует 10%-ная вероятность, что ситуация на рынке ценных бумаг ухудшится, 50%-ная – что рынок останется умеренным и 40%-ная – рынок будет возрастать. Следующая таблица содержит значения процентов прибыли от суммы инвестиции при трех возможностях развития рынка.

Альтернатива (фонды)	Процент прибыли от инвестиции (%)		
	Ухудшающийся рынок	Умеренный рынок	Растущий рынок
Простой	5	7	8
Специальный	–10	5	30
Глобальный	2	7	20

Представьте задачу в виде дерева решений.

Вариант 4.

Фирма планирует производство новой продукции быстрого питания в национальном масштабе. Исследовательский отдел убежден в большом успехе новой продукции и хочет внедрить ее немедленно, без рекламной кампании на рынках сбыта фирмы. Отдел маркетинга положение вещей оценивает иначе и предлагает провести интенсивную рекламную кампанию. Такая кампания обойдется в 100000 долл., а в случае успеха принесет 950000 долл. годового дохода. В случае провала рекламной кампании (вероятность этого составляет 30%) годовой доход оценивается лишь в 200000 долл. Если рекламная кампания не проводится вовсе, годовой доход оценивается в 400000 долл. при условии, что покупателям понравится новая продукция (вероятность этого равна 0,8), и в 200000 долл. с вероятностью 0,2, если покупатели останутся равнодушными к новой продукции. Представьте задачу в виде дерева решений.

Вариант 5.

Фред – владелец театра на Бродвее. Сейчас он решает вопрос о том, какую пьесу принять к постановке. Постановка первой пьесы (которая называется *Собаки*) требует $2 млн., тогда как постановка второй пьесы (называется *Ушедшие со снегом*) требует $4 млн. Однако вторую пьесу можно будет играть значительно дольше, чем первую. Вероятности успеха каждой пьесы и возможные доходы от них представлены в таблице.

Уровень успеха	Вероятности		Доход, млн.долл.	
	Собаки	Ушедшие со снегом	Собаки	Ушедшие со снегом
Хит сезона	0,3	0,4	5	25
Умеренный	0.3	0,3	4	15
Низкий	0,3	0,2	2	2
Провал	0,1	0,1	0,5	0,75

С помошью дерева решений определите, какую пьесу следует принять к постановке.

Вариант 6.

Допустим, вы являетесь автором романа, который обещает быть популярным. Вы можете либо самостоятельно напечатать роман, либо сдать его в издательство. Издательство предлагает вам 20000 долл. за подписание контракта. Если роман будет пользоваться спросом, будет продано 200000 экземпляров, в противном случае – лишь 10000 экземпляров. Издательство выплачивает авторский гонорар в сумме один доллар за экземпляр. Исследование рынка, проведенное издательством, свидетельствует о том, что существует 70%-ная вероятность, что роман будет популярным. Если же вы сами напечатаете роман, то понесете потери в сумме 90000 долл., связаннее с печатанием и маркетингом, но в этом случае каждый проданный экземпляр принесет вам прибыль в два доллара. Постройте дерево решений.

Вариант 7.

Феремер Мак-Кой может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0,25, 0,30 и 0,45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30000 долл. чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10000 долл. Если цены останутся неизменными, Мак-Кой лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35000 и 5000 долл. соответственно. Определите с помощью дерева решений какую культуру следует выращивать Мак-Кою?

Вариант 8.

Женщина-предприниматель собирается открывать ресторан недалеко от университетского городка. По одному плану проект включает бар с продажей пива, другой план не включает бар. В том и другом случае ее шансы на успех будут 0,6 (и на провал 0,4). Ежегодный доход, включая бар, равен $325 000. Без бара доход составит только $250000. Провал при наличии бара был бы оценен $70 000, а без бара – $20 000. Выберите вариант для предпринимателя, используя показатель денежной отдачи как критерий решения Должен ли бизнес-план включать бар?

Вариант 9.

Женщина – владелица бензоколонки думает о том, каков должен быть размер ее станции. После полного анализа маркетинговых факторов, относившихся к производству бензина и спросу на него, она разработала следующую таблицу:

Размер станции	Хороший рынок, $	Средний рынок, $	Плохой рынок, $
Маленькая	50000	20000	–10 000
Средняя	80000	30000	–20000
Большая	100000	30000	–40000
Очень большая	300000	25000	–160000
Вероятность	0,3	0,2	0,5

Постройте дерево решений.

Вариант 10.

Дженни Линд – автор любовных романов. Кинокомпания и телекомпания хотят получить эксклюзивные права на ее наиболее популярный роман для экранизации. Если Дженни продаст права телекомпании, то она получит одноразовую фиксированную сумму $900 000. Если же она продаст права кинокомпании, то ее гонорар будет зависеть от прокатного успеха кинокартины. Таблица платежей для данной ситуации имеет вид

Решение	Состояния природы		
	Малый успех	Средний успех	Большой успех
Продать права кинокомпании	$200000	$1000000	$3000000
Продать права телекомпании	$900000	$900000	$900000

Определите, кому Дженни должна продать права на свой роман, если вероятность малого успеха будущей картины оценивается как 0,3, среднего – 0,6, а большого – 0,1.

Часть 2. Деревья решений: учет новой информации
Пример выполнения работы

Руководство компании Sonorola уже было готово рекомендовать базовую маркетинговую и производственную стратегию (см. часть 1), когда совет директоров настоял, чтобы перед принятием окончательного решения были проведены дополнительные маркетинговые исследования. Вследствие этого решения совета директоров группе маркетинговых исследований в штаб-квартире в Токио было поручено провести соответствующий анализ с предоставлением через месяц отчета о результатах. Таким образом, через месяц будет получена новая информация, которую необходимо учесть перед окончательным выбором стратегии производства новых моделей телефонов.

Новая информация может повлиять на оценку значения Р(Б), вероятности благоприятной ситуации на рынке мобильных телефонов. Если отчет группы маркетинговых исследований будет оптимистическим, то эту вероятность следует увеличить, а если пессимистическим, то уменьшить.

Пересчет вероятностей с учетом новой информации

Пусть отчет с результатами маркетинговых исследований оценивается либо как оптимистический (О), либо как пессимистический (П). Если считать результаты исследований абсолютно точными, то оптимистический отчет означает гарантированную благоприятную ситуацию на рынке; и, наоборот, пессимистический отчет гарантирует неблагоприятную обстановку на рынке. Другими словами, если результаты исследований абсолютно точны, то отчет однозначно определяет истинное состояние природы (ситуацию на рынке). Но даже если нельзя гарантировать абсолютную точность результатов отчета, такие исследования очень полезны, поскольку позволяют уточнить степень надежности наших представлений о ситуации на рынке. Чтобы количественно выразить влияние надежности новой информации на вероятности состояний природы, используют условные вероятности.

Условные вероятности

Обозначим через А и В два случайных события. Нестрогое определение условной вероятности Р(А|В): это вероятность осуществления события А при условии, что осуществилось событие В. Например, Р(О|Б) — условная вероятность, что отчет группы маркетинговых исследований будет оптимистичным, при условии, что ситуация на рынке действительно благоприятная. Если исследования выполнены абсолютно точно, то эта вероятность равна 1, т.е. в этом случае отчет точно отображает ситуацию на рынке. Допустим, в прошлом, когда ситуация на рынке была благоприятной, оптимистический отчет представлялся в 60% случаев. Тогда можно считать, что Р(О|Б) = 0,6. Поскольку у нас только два типа отчета: оптимистический и пессимистический, то значение вероятности Р(П|Б) = 1 – 0,6 = 0,4, т.е. примерно в 40% случаев отчет будет пессимистическим, хотя ситуация на рынке будет благоприятной.

Если ситуация на рынке неблагоприятная, маркетинговые исследования должны это почувствовать и отразить, но, скорее всего, не с абсолютной точностью: пусть Р(П|Н) = 0,7. В этом случае Р(О|Н) = 0,3. Эти условные вероятности характеризуют надежность маркетинговых исследований.

Вычисление апостериорных вероятностей

Предположим, что группа маркетинговых исследований предоставила оптимистический отчет. Какова в этом случае вероятность благоприятной ситуации на рынке? После получения новой информации (маркетингового отчета) эта вероятность будет условной вероятностью Р(Б|О). (Эта вероятность не совпадает с условной вероятностью Р(О|Б), которую мы считаем известной и равной 0,6.) Первоначальная оценка вероятности Р(Б) называется *априорной вероятностью*, а условная вероятность Р(Б|О) называется *апостериорной вероятностью*. Мы уже имеем оценку априорных вероятностей: Р(Б)=0,45 и Р(Н)=0,55 (см. часть 1).

Основой для вычисления апостериорных вероятностей служит теорема Байеса. Процесс вычисления вероятностей мы организуем на новом листе (назовем его Вероятности) в рабочей книге Sonarola. Для создания такого листа выполните следующие действия.

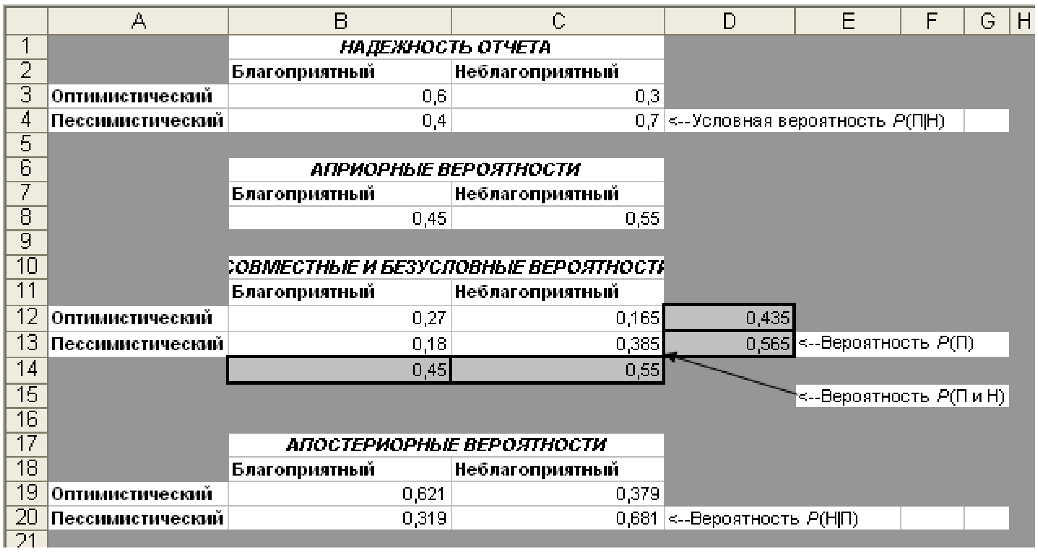
1. В ячейки A1:C4 введите значения условных вероятностей, характеризующие надежность маркетинговых исследований (т.е. вероятностей P(О|Б), P(О|Н), P(П|Б) и P(П|Н)). Эти значения образуют таблицу, озаглавленную "Надежность отчета" (см. рис. 9.6). Сумма значений в каждом столбце должна быть равной 1, сумма значений построкам может быть любой.

2. В ячейках B8 и C8 введем априорные вероятности (см. рис. 9.6).

3. Создайте новую таблицу «Совместные и безусловные вероятности» путем умножения каждого столбца таблицы надежности на соответствующую априорную вероятность. Например, каждый элемент столбца **Благоприятный** умножьте на вероятность P(Б) благоприятной ситуации на рынке и получите значения совместного распределения вероятностей. Для каждой строки новой таблицы вычисляется сумма ее элементов. Получаем значений безусловных (частных) вероятностей событий P(О) и P(П) в ячейках D12 и D13.

Ячейка	Формула	Примечание
B12	=B3*$B$8	
B13	=B4*$B$8	
C12	=C3*$C$8	
C13	=C4*$C$8	
B14	=СУММ(B12:B13)	Копируем в диапазон B14:C14
D12	=СУММ(B12:C12)	Копируем в диапазон D12:D13

4. Вычисляем значения таблицы "Апостериорные вероятности" путем деления каждого значения совместной вероятности на соответствующее значение безусловной вероятности (например, значение в ячейке B12 делится на значение из ячейки D12).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		НАДЕЖНОСТЬ ОТЧЕТА						
2		Благоприятный	Неблагоприятный					
3	Оптимистический	0,6	0,3					
4	Пессимистический	0,4	0,7	<--Условная вероятность *P*(П|Н)				
5								
6		АПРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ						
7		Благоприятный	Неблагоприятный					
8		0,45	0,55					
9								
10		СОВМЕСТНЫЕ И БЕЗУСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ						
11		Благоприятный	Неблагоприятный					
12	Оптимистический	0,27	0,165	0,435				
13	Пессимистический	0,18	0,385	0,565	<--Вероятность *P*(П)			
14		0,45	0,55					
15					<--Вероятность *P*(П и Н)			
16								
17		АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ						
18		Благоприятный	Неблагоприятный					
19	Оптимистический	0,621	0,379					
20	Пессимистический	0,319	0,681	<--Вероятность *P*(Н|П)				
21								

Рис. 7.6. Вычисление апостериорных вероятностей

Включение апостериорных вероятностей в дерево решений

Теперь рассмотрим данную модель, представленную в виде дерева решений, показанного на рис. 7.7. Первый узел этого дерева (обозначен как I) соотпетствует выполнению маркетинговых исследований. Он является узлом событий, поскольку результат этих исследований заранее не определен. Из этого узла выходят две ветви, которые соответствуют оптимистическому (О) и пессимистическому (П) результату маркетинговых исследований. Вероятности Р(О) и Р(П) этих результатов подсчитаны в ячейках D12 и D13 рабочего листа **Вероятности** (см. рис. 7.6).

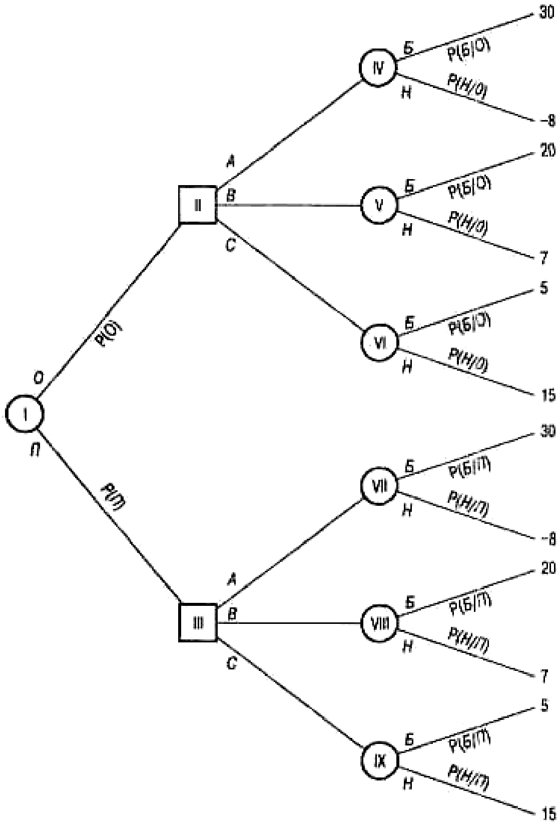


Рис. 7.7 Дерево решений с узлом маркетинговых исследований

Если результат маркетинговых исследований оптимистичен, мы по дереву решений переходим к узлу II, который является узлом решений. В этом узле необходимо выбрать одно из трех возможных решений – А, В или С, которые соответствуют агрессивной, базовой и осторожной стратегиям. Предположим, выбрано решение А. Это решение ведет к узлу событий IV, из которого исходят две ветви, соответствующие случайным событиям: ситуация на рынке будет благоприятной (Б) и ситуация будет неблагоприятной (Н).

Если ситуация на рынке мобильных телефонов для компании Sonorola будет благоприятной, то она получит чистый доход 30 (млн. долл.) – конечное значение данной ветви.

Важно отметить, что дерево создается в "хронологическом" порядке, т.е. в том порядке, в каком становится доступной информация и в каком принимаются решения. Следовательно, сначала проводятся маркетинговые исследования (результат оптимистичен или пессимистичен), затем принимается решение (выбирается агрессивная, базовая или осторожная стратегия), после этого проявляются условия на рынке (благоприятная ситуация или неблагоприятная).

Чтобы найти оптимальное решение с помощью этого дерева, надо указать для него значения вероятностей Р(Б|О), Р(Н|О), Р(Б|П), Р(Н|П), Р(О) и Р(П). Первые четыре значения можно найти в таблице «Апостериорные вероятности» рабочего листа **Вероятности** (см. рис. 7.6). Например, значение вероятности Р(Н|О) находится на пересечении столбца "Неблагоприятный" и строки "Оптимистический" и равно 0,379.

Для ветви, соответствующей оптимистическому результату маркетинговых исследований, на основе теоремы Байеса априорные вероятности Р(Б) и Р(Н) заменяются условными (апостериорными) вероятностями Р(Б|О) и Р(Н|О). Аналогично для ветви, соответствующей пессимистическому результату маркетинговых исследований, вероятности Р(Б) и Р(Н) заменяются условными вероятностями Р(Б|П) и Р(Н|П). Затем TreePlan автоматически производит пересчет ожидаемых значений на дереве решений (в обратном порядке, начиная с конечных узлов). Результаты расчетов показаны на рис. 7.8.

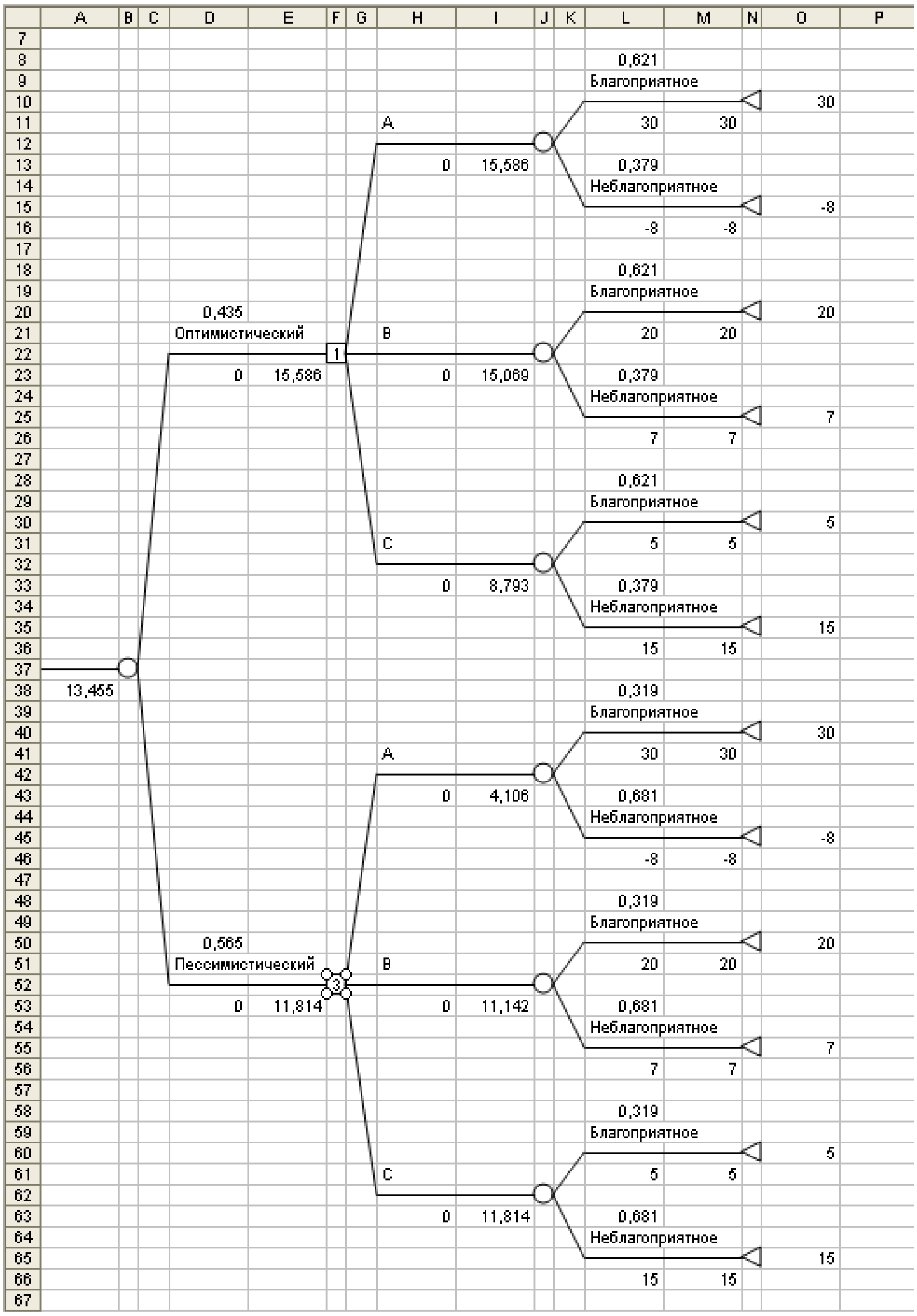


Рис. 7.8. Новое дерево решений

Чтобы создать такое дерево, выполните следующие действия. (Отметим, что TreePlan не может создать более одного дерева решений в одной рабочей книге, поэтому данное дерево мы создаем в новой книге Excel.)

1. Откройте новую рабочую книгу и выполните команду Сервис→Decision Tree. В открывшемся диалоговом окне TreePlan New щелкните на кнопке New Tree (Новое дерево).

2. TreePlan создаст дерево решений с одним узлом. Щелкните на этом узле и нажмите комбинацию клавиш <Ctrl+t>. В открывшемся диалоговом окне установите переключатель Change to event (Преобразовать в событие) и щелкните на кнопке ОК.

3. Щелкните на конечном узле, нажмите <Ctrl+t> и в открывшемся диалоговом окне установите переключатель Change to decision node (Преобразовать в узел решений) и переключатель Three (Три) в секции Branches (Ветви) диалогового окна. Щелкните на кнопке ОК.

4. Повторите действия, описанные в предыдущем пункте, для другого конечного узла.

5. Щелкните на новом конечном узле в верхней части дерева решений, нажмите <Ctrl+t> и в открывшемся диалоговом окне установите переключатель Change to event node (Преобразовать в узел событий) и переключатель Two (Два) в секции Brenches (Ветви) диалогового окна. Щелкните на кнопке ОК.

6. Скопируйте узел, созданный в предыдущем пункте, в другие два конечных узла. (Для копирования используйте команды TreePlan Copy subtree (Копировать поддерево) и Paste subtree (Вставить поддерево), а не средства копирования Excel.)

7. Далее аналогичные действия выполните для нижней части дерева решений. (Можно также скопировать узел, который на схеме рис. 7.7 обозначен как узел II, в узел III.)

Построение дерева решений закончено. Далее следует ввести значения вероятностей и платежей.

Построенное дерево решений можно использовать для выбора оптимального решения. Очевидно, что если результат маркетинговых исследований будет оптимистичен (ветвь «О» на рис. 7.7), то мы придем к узлу II (ячейка F22 на рис. 7.8). Тогда максимальное ожидаемое значение мы получим при выборе решения А (агрессивная стратегия). (TreePlan указывает на это решение, помещая "1" в ячейку F22, что обозначает первую ветвь, исходящую из этого узла.) Аналогично, если результат маркетинговых исследований будет пессимистичным (ветвь "II" на рис. 7.7), то мы придем к узлу III (ячейка F52 на рис. 7.8). Тогда максимальное ожидаемое значение мы получим при выборе решения С (осторожная стратегия).

Ожидаемое значение дополнительной информации

Ожидаемый результат оптимального решения, записанный в ячейке F37 на схеме дерева решений (рис. 7.8), составляет

$$ER = 15{,}586 \cdot 0{,}435 + 11{,}814 \cdot 0{,}565 = 13{,}455.$$

Это значение ожидаемого результата, если будет выполнено маркетинговое исследование й затем, в зависимости от результата исследований, выбрано соответствующее оптимальное решение.

В части 1 мы видели, что если маркетинговые исследования не выполнялись, то оптимальным решением будет базовая стратегия, при этом ожидаемый результат равен 12,85. Очевидно, что проведение маркетинговых исследований увеличило ожидаемый результат на \$0,61 млн. (13,46 – 12,85 = 0,61). Даже если результаты маркетинговых исследований не абсолютно надежны, они чего-то стоят (если быть точным, то стоят они \$0,61 млн.). Эта разность между ожидаемым результатом при дополнительной информации и ожидаемым результатом без нее называется *ожидаемым значением дополнительной информации*. Это верхняя граница цены, которую можно заплатить за какую-либо частную дополнительную информацию.

Подсчитаем в данной ситуации ожидаемое значение *полной* информации. Напомним, что это цена точной информации о том, какое состояние природы осуществится. Исходная таблица платежей представлена на рис. 7.1. Если мы уверены, что рынок будет благоприятным, то наилучшей будет агрессивная стратегия, которая вернет платеж в размере 30. Если мы уверены, что рынок будет неблагоприятным, то наилучшей будет осторожная стратегия, которая вернет платеж в размере 15. За сколько можно купить полную информацию о состоянии рынка? Поскольку вероятность благоприятной ситуации на рынке равна 0,45, а неблагоприятной – 0,55, то

$$\text{ожидаемое значение полной информации} = 30 \cdot 0{,}45 + 15 \cdot 0{,}55 - 12{,}85 =$$
$$= 21{,}75 - 12{,}85 = 8{,}90,$$

Последние вычисления говорят о том, что полная информация о состоянии рынка может принести \$8,90 млн. сверх того ожидаемого результата, который мы можем получить без нее. В данном случае ожидаемое значение полной информации значительно больше того, что мы можем получить, проведя маркетинговые исследования (ожидаемое значение информации, полученной от этих исследований, равно \$0,61 млн.). Но чем точнее будут проведены маркетинговые исследования (т.е. чем больше будут вероятности P(О|Б) и P(П|Н)), тем меньше разность между ожидаемыми значениями полной и дополнительной информации.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта получите модель.
2. Постройте дерево решений.
3. Вычислите ожидаемое значение дополнительной информации.
4. Покажите преподавателю результаты своих построений и расчетов.
5. Отчет по лабораторной работе должен содержать:
   - номер варианта;
   - исходные данные варианта;
   - дерево решений;
   - ожидаемое значение дополнительной информации.

Варианты заданий

Вариант 1.

Руководитель компании Kelly Construction (см. задачу из части 1) хочет уменьшить неопределенность относительно спроса на студенческое жилье. Он обратился в строительное управление муниципалитета, где ему могут сделать прогноз спроса, однако результат прогноза можно охарактеризовать только как "малый спрос" (обозначим такой прогноз как M_1), и "большой спрос" (M_2). Надежность такого прогноза показана в табл. 7.1, а таблица платежей (несколько отличная от аналогичной таблицы в задаче части 1) – в табл. 7.2.

Таблица 7.1

Прогноз	P(M|D)		
	D_1	D_2	D_3
M_1	0,7	0,4	0,2
M_2	0,3	0,6	0,8

Таблица 7.2

Решение	Спрос, долл.		
	Низкий (D_1)	Средний (D_2)	Высокий (D_3)
Строить 100 модулей	500000	500000	500000
Строить 200 модулей	0	1000000	1000000
Строить 300 модулей	–700000	400000	1500000
Вероятность	0,3	0,5	0,2

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.
2) Найдите оптимальную стратегию.
3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 2.

Вернитесь к задаче части 1. Дирекция хочет нанять фирму, занимающуюся маркетинговыми исследованиями, чтобы эта фирма провела исследование по прогнозированию успеха (*У*) или неуспеха (*Н*) за 5 тыс. ден.ед. Надежность прогноза показана в табл. 7.3.

Таблица 7.3

	Успех	Неуспех
IBM	0,5	0,15
T	0,3	0,15
Q	0,1	0,6

WFT	0,1	0,1

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.
2) Найдите оптимальную стратегию.
3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 3.

Вернитесь к задаче части 1. Вы хотите нанять фирму, занимающуюся маркетинговыми исследованиями, чюбы эта фирма провела исследование по прогнозированию успеха (*У*) или неуспеха (*Н*) за 10 тыс. ден.ед. Надежность прогноза представлена в табл. 12.4.

Таблица 12.4

Прогноз	Успех	Неуспех
Простой	0,5	0,4
Специальный	0,1	0,2
Глобальный	0,4	0,4

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.
2) Найдите оптимальную стратегию.
3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 4.

Пусть в задаче части 1 дирекция компании решила провести пробную продажу своей продукции в выбранных населенных пунктах. Результатом пробной продажи являются оценки «хорошо» (a_1) или «плохо» (a_2). Тест дает следующие условные вероятности с проведением рекламной кампании и без нее.

$P(a_j \mid v_i)=$ с рекламной кампанией		a_1	a_2
	v_1	0,95	0,05
	v_2	0,3	0,7

$P(a_j \mid w_i)=$ без рекламной кампанией		a_1	a_2
	w_1	0,8	0,2
	w_2	0,4	0,6

Здесь v_1 и v_2 обозначают соответственно «успех» и «неуспех», а w_1 и w_2 – «восприимчивый» и «невосприимчивый» покупатель.

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.
2) Найдите оптимальную стратегию.
3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 5.

Предположим, что вы хотите вложить на фондовой бирже 10000 долл. В акции одной из двух компаний: A или B. Акции компании A являются рискованными, но могут принести 5000 долл. прибыли на протяжении следующего года. Если условия фондовой биржы будут неблагоприятны, вы потеряете 2000 долл.. Компания B обеспечивает 1500 долл. прибыли в условиях повышения котировок на бирже и только 500 долл. – в условиях понижения котировок. Все аналитические публикации, с которыми можно познакомиться, с вероятностью 60% прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40% - понижение котировок. Предположим, вместо того, чтобы полностью полагаться на эти публикации, вы решили провести личное исследование путем консультаций с другом, который хорошо разбирается в вопросах, касающихся фондовой биржы. Друг высказывает общее мнение «за» или «против» инвестиций. Это мнение в дальнейшем определяется количественно следующим образом.

При повышении котировок его мнение с 90%-ной вероятностью будет «за», при снижении котировок вероятность его мнения «за» уменьшится до 50%.

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.

2) Найдите оптимальную стратегию.

3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 6.

Вернитесь к проблеме выбора решения из задачи части 1. Предположим, что вы заключили договор с литературным агентом на исследование, связанное с потенциальным успехом романа. Исходя из предыдущего опыта, компания извещает вас, что если роман будет пользоваться спросом, то исследование предскажет неверный результат в 20% случаев. Если же роман не станет популярным, то исследование предскажет верный результат в 85% случаев. Как эта информация повлияет на ваше решение.

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.

2) Найдите оптимальную стратегию.

3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 7.

Вернитесь к проблеме выбора решения фермером Мак-Коем из задачи части 1.Фермер имеет дополнительный выбор, связанный с использованием земли как пастбища, что гарантированно принесет ему прибыль в 7500 долл. Феремер получил также дополнительную информацию от брокера, касающуюся степени стабильности будущих цен на продукцию. Оценки брокера «благоприятный-неблагоприятный» выражаются количественно в виде следующих условных вероятностей.

$P(a_i|s_j)=$

	a_1	a_2
s_1	0,15	0,85
s_2	0,5	0,5
s_3	0,85	0,15

В данном случае a_1 и a_2 – оценки брокера «благоприятный» и «неблагоприятный», а s_1, s_2 и s_3 представляют изменение в будущих ценах: соотвественно «понижение», «повышение».

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.

2) Найдите оптимальную стратегию.

3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 8.

Вернитесь к проблеме выбора решения из задачи части 1. Женщина обратилась в фирму, чтобы эта фирма провела исследование по прогнозированию успеха (*У*) или неуспеха (*Н*) будущего ресторана за 10000$. Надежность такого прогноза показана в таблице 12.7.

Таблица 7.7

	Успех	Неуспех
Ресторан с баром Ресторан без бара	0,4 0,6	0,5 0,5

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.

2) Найдите оптимальную стратегию.

3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 9.

Женщина – владелица бензоколонки думает о том, каков должен быть размер ее станции (задача из части 1). Она обратилась в фирму, чтобы эта фирма провела исследование по прогнозированию успеха (*У*) или неуспеха (*Н*) будущей бензоколонки за 10000$. Надежность такого прогноза показана в таблице 7.8.

Таблица 7.8

Размер станции	Успех	Неуспех
Маленькая	0,03	0,15
Средняя	0,07	0,3
Большая	0,3	0,3
Очень большая	0,6	0,25

1) Создайте дерево решений для данной ситуации.
2) Найдите оптимальную стратегию.
3) Вычислите ожидаемые значения дополнительной и полной информации.

Вариант 10.

Вернитесь к задаче части 1. Дженни Линд хочет нанять фирму, занимающуюся маркетинговыми исследованиями, чтобы эта фирма провела исследование по прогнозированию успеха (У) или неуспеха (Н) будущей кинокартины, снятой по ее роману. За это Дженни согласна заплатить $100000. Точность прогноза определяется следующими условными вероятностями: P(У|М) = 0,3, P(У|С) = 0,6, P(У|Б) = 0,8, P(Н|М) = 0,7, P(Н|С) = 0,4, P(Н|Б) = 0,2.

1) Создайте дерево решений для данной модели.
2) Найдите оптимальную стратегию.
3) Вычислите ожидаемое значение дополнительной информации. Какую наибольшую цену она может заплатить за исследования?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9.

Теория игр

<u>Цель работы</u> – ознакомиться с методами решения задач матричных игр.

Основные сведения

Теория игр служит для моделирования оценки воздействия принятого решения на конкурентов. Изначально была разработана военными с тем, чтобы в стратегии учесть возможные действия противника. В бизнесе игровые модели используются для прогнозирования реакции конкурентов на изменение цен, модификацию и освоение новой продукции, предложения дополнительного обслуживания и т.д. Теория игр используется реже, чем другие модели, так как ситуации в реальном мире очень сложны и часто меняются. Но, тем не менее, теория игр полезна для определения наиболее важных и требующих учета факторов в ситуации принятия решений в условиях конкурентной борьбы. Благодаря применению данной теории организация может прогнозировать действия конкурентов, что является преимуществом и увеличивает конкурентоспособность.

Игрой называется идеализированная математическая модель конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте называются *игроками*, а исход конфликта – *выигрышем*. Регулярное действие, выполняемое игроком, называется *ходом*. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется *стратегией*. Все возможные действия игроков подчиняются определённым правилам.

Рассмотрим матричные игры.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Решение матричных игр в чистых стратегиях.

Пусть первый игрок имеет m стратегий, второй n стратегий. Обозначим через A_i – i-ую стратегию игрока 1 $(i=1,...,m)$, через B_j – j-ую стратегию игрока 2 $(j=1,...,n)$. Паре стратегий (i, j) поставим в соответствие число a_{ij} - выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою стратегию i, а второй – j.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей матрицей, которая называется платёжной или матрицей выигрышей.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ A_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Каждая стратегия i, j называется *чистой стратегией*.

В каждой партии делается ход: игрок 1 выбирает стратегию i, игрок 2 – стратегию j. После чего игрок 1 получает выигрыш a_{ij} (за счёт игрока 2). Если $a_{ij} < 0$, значит игрок 1 платит игроку 2 сумму $|a_{ij}|$ и игра заканчивается.

Для того чтобы найти решение игры, следует для каждого игрока найти стратегию, которой называется *оптимальной*. Для первого это стратегия, которая приносит максимальный выигрыш, если второй придерживается своей. В то же время для второго – это стратегия, которая приносит минимальный проигрыш, если первый придерживается своей.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока.

Игрок 1 для каждого *i* выбирает минимальное значение выигрыша (при любых стратегий игрока 2) ,т.е.

$$\min_j a_{ij} \quad (i = 1,\dots,m).$$

Затем отыскивается такая стратегия $i = i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = v_н .$$

Величина $v_н$ называется *максимином* матрицы или *нижней ценой игры*. Нижняя чистая цена игры показывает какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Стратегия игрока 2 максимально уменьшить выигрыш игрока 1 (за счёт своих стратегий). Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = v_в .$$

Или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина $v_в$ называется *минимаксом* матрицы или *чистой верхней ценой игры*.

Таким образом, игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не менее $v_н$, а игрок 2 может не допустить выигрыш игрока 1 больше чем на $v_в$.

В случае, если значения $v_н$ и $v_в$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $v_н = v_в = v$. В этом случае говорят, что игра имеет *решение в чистых стратегиях*, а стратегии i_0, j_0, в которых достигается v – *оптимальными чистыми стратегиями*. Пара чистых стратегий i_0, j_0 называется *седловой точкой*. Седловой элемент $a_{i_0 j_0}$ является минимальным в $i-$ой строке и максимальным в $j-$ом столбце платёжной матрицы. Значение v называется *чистой ценой игры*.

Пример. Найти решение игры, заданной платёжной матрицей *A* в чистых стратегиях.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

Найдём минимальные элементы в каждой строке и максимальные элементы в каждом столбце. Затем найдём максимальный элемент среди минимальных и минимальный среди максимальных. Занесём всё в следующую таблицу.

	B_1	B_2	B_3	$\min\limits_j$
A_1	7	5	4	$\boxed{4}$
A_2	1	8	3	1
A_3	8	1	2	1
$\max\limits_i$	8	8	$\boxed{4}$	

$$\max_i \min_j a_{ij} = v_н = 4$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = v_в = 4$$

В нашей задаче $v_н = v_в = v = 4$. Пара $(i_0 = 1, j_0 = 3)$ образует седловую точку. Таким образом, оптимальной стратегией для игрока 1 будет стратегия A_1, а для игрока 2 – стратегия B_3. Цена игры $v = 4$.

Пример. Показать, что данная платёжная матрица не имеет решения в чистых стратегиях.

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 50 & 30 \end{bmatrix}$$

Решение: Также как и в предыдущей задаче составим таблицу

	$B1$	$B2$	$\min\limits_j$
$A1$	10	40	10
$A2$	50	30	$\boxed{30}$
$\max\limits_i$	50	$\boxed{40}$	

$$\max_i \min_j a_{ij} = v_н = 30$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = v_в = 40$$

Решения в чистых стратегиях не существует, так как нижняя цена игры достигается в стратегии A_2 и её значение равно 30, в то время как верхняя цена игры достигается в стратегии B_4 и её значение равно 40.

Уменьшение порядка платёжной матрицы.

Важным приёмом, позволяющем уменьшить размеры платёжной матрицы, является так называемое *правило доминирования*. Оно основано на отбрасывании тех чистых стратегий, которые не вносят никакого вклада в искомые оптимальные стратегии.

Один из приёмов снижения размеров матрицы заключается в сравнении её строк и столбцов.

Стратегия A_i называется *доминируемой* стратегией A_j, а стратегия A_j – *доминирующей,* если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняются неравенства

$$a_{i1} \le a_{j1}, a_{i2} \le a_{j2}, a_{i3} \le a_{j3}, \dots, a_{im} \le a_{jm}.$$

Считают, что игрок поступает разумно, если будет избегать доминируемых стратегий.

В случае, если выполняется соотношение

$$a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, a_{i3} = a_{j3}, \dots, a_{im} = a_{jm},$$

то говорят, что стратегии A_i и A_j дублируют друг друга.

Если в матрице игры одна из строк (столбцов) доминирует другую строку (другой столбец) или две строки (два столбца) дублируют друг друга, то можно уменьшить размеры матрицы путём исключения доминируемых строк (столбцов) и одной (одного) из дублирующих.

Пример. Заменить исходную матрицу выигрышей на матрицу меньших размеров.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Решение:

Стратегия A_1 является доминируемой стратегией A_3, стратегия B_1 является дублирующей по отношению к стратегии B_4. Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными. Получим платёжную матрицу

$$\begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

B_5 – доминирующая над B_2 и B_4.

$$\begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_3 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Понятие о матричных играх со смешанным расширением.

Решения матричной игры начинается с нахождения её верхней и нижней цены. Если эти значения совпадают и игра имеет седловую точку, то на этом решение игры завершается. Если же матричная игра не имеет решения в чистых стратегиях, то для нахождения её решения используются так называемые смешанные стратегии, а найденные ранее нижняя и верхняя цены игры указывают на то, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. В этом случае оптимальный результат игры достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются *активными стратегиями*.

Пусть игрок 1 имеет m чистых стратегий $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$. Обозначим через $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ вероятности, с которыми игрок 1 использует свои соответствующие чистые стратегии. Тогда смешанная стратегия игрока 1 – это набор чисел $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_m)$, удовлетворяющих соотношениям

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1, ..., m), \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2. Обозначим через $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ вероятности, с которыми он использует свои чистые стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$. Смешанная стратегия для игрока 2 – набор чисел $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, удовлетворяющих соотношениям

$$y_j \geq 0 \quad (j=1,...,n), \; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Для соблюдения секретности, каждый игрок применяет свои смешанные стратегии независимо от выбора другого игрока.

Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры:

$$v_н \leq v \leq v_в .$$

При этом условии величина v называется *ценой игры*.

Если x^* – оптимальная стратегия первого игрока, а y^* – оптимальная стратегия второго игрока, то число

$$v = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

является ценой игры.

Определение оптимальных стратегий для обоих игроков и цены игры и составляет *процесс нахождения решения игры*.

Доказано, что всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

И для того чтобы число v было ценой игры, а x^* и y^* – оптимальными стратегиями необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i\,j} x_i^* \geq v \quad (j=1,...,n) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} y_j^* \leq v \quad (i=1,...,m).$$

Для игр порядка 2×2, $2\times n$, $m\times 2$ справедливо следующее утверждение: если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими вероятностями будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальные (в том числе и чистые стратегии). И для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Графическое решение матричных игр.

Графический метод применим к тем играм, в которых хотя бы один из игроков имеет две стратегии.

Рассмотрим игру 2хn, представленную в таблице 1. Эта игра не имеет седловой точки.

Таблица 1

	B_1	B_2	…	B_k	…	B_n	Вероятности использования чистых стратегий игроком A
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	$x_1=p$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	$x_2=1-p$
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	y_1	y_2	…	y_k	…	y_n	

Построим графики прямых

$$w_k = a_{1k}p + a_{2k}(1-p) = (a_{1k} - a_{2k})p + a_{2k}$$

для каждого k=1,2,…, n в системе координат pOw. На каждой из построенных прямых определяются и отмечаются наименьшие значения полужирной ломаной линией. Эта линия огибает снизу все семейство построенных прямых и называется *нижней огибающей семейства* (рис. 9.1).

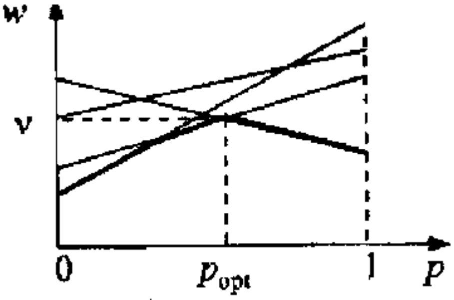


Рис. 9.1

Цену игры v определяет верхняя точка построенной нижней огибающей. Координаты этой точки являются оптимальной стратегией игрока A:

$$x = (p_{опт};(1-p_{опт})).$$

Пусть в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_k и w_l, при этом прямая w_k имеет положительный наклон, а прямая w_l – отрицательный. Оптимальная смешанная стратегия игрока B получается, если положить $y_k=q$, $y_l=1-q$, $y_j=0$ при $j \neq k,l$, где q находят из уравнения

$$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q).$$

Пример. Найти решение игры

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна –1, верхняя равна 1. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Пусть $x=(x_1, x_2)$ – смешанная стратегия игрока 1, $y=(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ – смешанная стратегия игрока 2.

Построим график нижней огибающей. Предварительно запишем уравнения прямых:

$$w_1 = 6p + 2(1-p) = 8p - 2;$$

$$w_2 = 4p - 1(1-p) = 5p - 1;$$

$$w_3 = 3p + (1-p) = 2p + 1;$$

$$w_4 = p + 0(1-p) = p;$$

$$w_5 = -p + 5(1-p) = -6p + 5;$$

$$w_6 = 0p + 4(1-p) = -4p + 4.$$

Графики данных прямых, построенных в системе координат pOw, представлены на рис. 6.2.

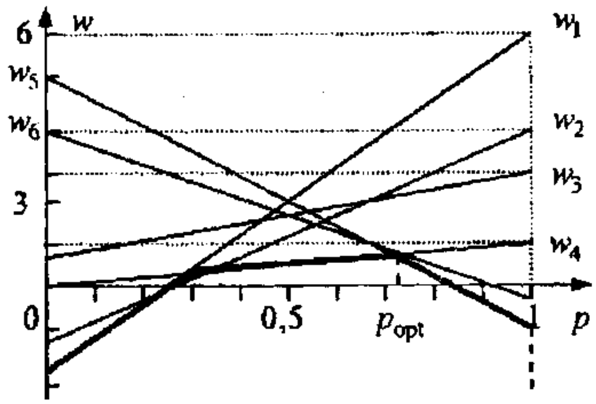


Рис. 9.2

Нижняя огибающая выделена на рис.9.2 полужирной ломаной линией. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении прямых w_4 и w_5.

Составим систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} p = v, \\ -6p + 5 = v. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $p_{опт}$=5/7. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока *A*, равна v =5/7.

Оптимальная стратегия игрока *A* равна $x = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Найдем оптимальную стратегию игрока *B*. В наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_4 и w_5, при этом прямая w_4 имеет положительный наклон, а прямая w_5 – отрицательный. Тогда $y_4=q$, $y_5=1-q$, $y_j=0$ при $j\neq 4,5$, Составим уравнение:

$q-(1-q)=0\cdot q+5(1-q)$;

$7q=6$.

Отсюда находим

$q_{опт}=6/7$.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока *B* равна:

$$y = \left(0;0;0;\frac{6}{7};\frac{1}{7};0\right).$$

Для решения игры *m*x2 также может быть применен графический метод.

Пример. Графически решить игру, заданную платёжной матрицей.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение:

	B_1	B_2	Вероятности использования чистых стратегий игроком 1.
A_1	5	7	x_1

A_2	7	6	x_2
A_3	3	5	x_3
A_4	4	8	x_4
Вероятности использования чистых стратегий игроком 2	$y_1=q$	$y_2=1–q$	$x_1+x_2+x_3+x_4=1$

В данном примере стратегия A_3 игрока 1 является доминируемой стратегиями A_2 и A_4, следовательно, можно исключить доминируемую строку и уменьшить платёжную матрицу в размерах (при этом вероятность использования игроком 1 своей чистой стратегии A_3 будет нулевая, $x_3=0$):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Теперь отложим на оси *Oy* отрезок единичной длины B_1B_2. Восстановим перпендикуляры в токах B_1 и B_2 (в данном случае один перпендикуляр совпадёт с осью O*x*) и будем отмечать выигрыши игрока 1 в зависимости от принимаемых им стратегий и стратегии B_1 и B_2 игрока 2. Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока 1. В нашем примере ломанная $A_2MA_4^{/}$ соответствует верхней границе выигрыша игрока 1 (верхняя огибающая). И самый минимальный из максимальных выигрышей будет достигаться в точке *M*, которой соответствует оптимальная смешанная стратегия игрока 2 $y^*=(y_1^*,y_2^*)$.

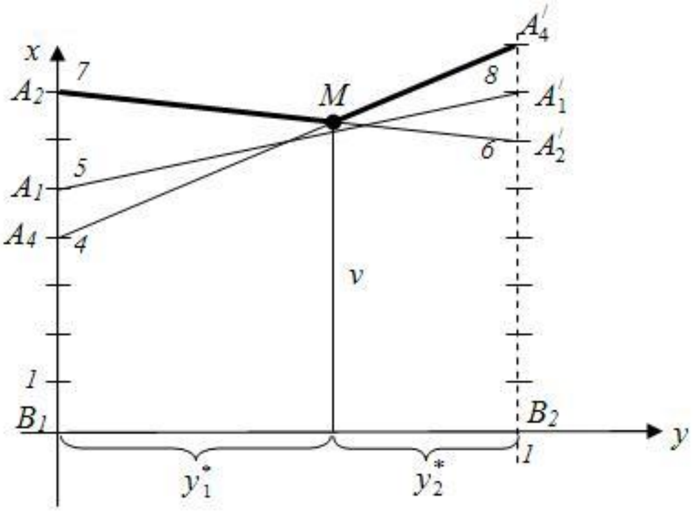


Рис. 9.3

Для нахождения неизвестных y_1^*, y_2^* и v, рассмотрим прямые $A_2A_2^{/}$ *и* $A_4A_4^{/}$. Составим систему с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 7y_1^* + 6y_2^* = v, \\ 4y_1^* + 8y_2^* = v, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Решим её. Из второго вычтем первое, получим:

$$\begin{cases} 3y_1^* - 2y_2^* = 0, \\ y_1^* + y_2^* = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1^* - 2y_2^* = 0, \\ y_1^* = 1 - y_2^*; \end{cases} \Rightarrow 3(1 - y_2^*) - 2y_2^* = 0; \Rightarrow y_2^* = \frac{3}{5}.$$

Из второго уравнения последней системы:

$$y_1^* = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Из первого уравнения первой системы:

$$v = 7 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{32}{5}.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока 2: $y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, а цена игры $v = \frac{32}{5}$.

Для игрока 1 (при стратегиях A_2 и A_4) система для нахождения неизвестных будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 7x_2^* + 4x_4^* = \frac{32}{5}, \\ 6x_2^* + 8x_4^* = \frac{32}{5}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму, получим

$$-14x_2^* + 6x_2^* = -\frac{64}{5} + \frac{32}{5}, \quad -8x_2^* = \frac{-32}{5}, \quad x_2^* = \frac{4}{5}.$$

Из первого уравнения:

$$4x_4^* = \frac{32}{5} - \frac{28}{5} = \frac{4}{5}, \quad x_4^* = \frac{1}{5}.$$

Оптимальная смешанная стратегия для первого игрока

$$x^* = \left(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right).$$

Таким образом, решение игры $x^* = \left(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$, $y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ и $v = \frac{32}{5}$.

Рассмотрим пример решения матричной игры графическим методом в Mathcad:

$ORIGIN := 1$

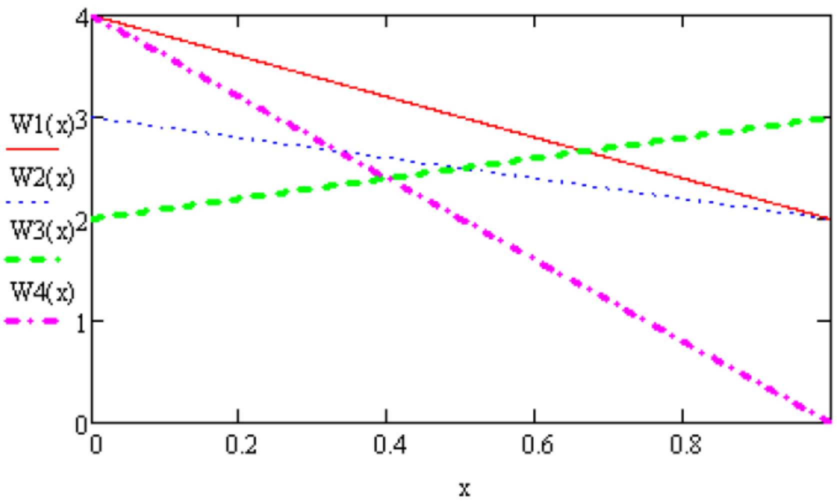
$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad n := cols(A) \quad i := 1..n \quad b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right) \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \beta := \min(b) \quad \beta = 3$

$Q := A^T \quad i := 1..2 \quad a_i := \min\left(Q^{\langle i \rangle}\right) \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha := \max(a)$

$\alpha = 2 \qquad 2 \le \nu \le 3$

$W1(x) := \left(A_{1,1} - A_{2,1}\right) \cdot x + A_{2,1} \quad W2(x) := \left(A_{1,2} - A_{2,2}\right) \cdot x + A_{2,2} \quad W3(x) := \left(A_{1,3} - A_{2,3}\right) \cdot x + A_{2,3}$

$W4(x) := \left(A_{1,4} - A_{2,4}\right) \cdot x + A_{2,4}$



$W3(x) = W4(x) \text{ solve}, x \rightarrow \frac{2}{5} \quad p1 := \frac{2}{5} \quad p2 := 1 - p1 \quad \nu := W3(p1) \quad \nu = 2.4$

$b1(y) := 3y \quad b2(y) := -2y + 4 \quad b2(y) = b1(y) \text{ solve}, y \rightarrow \frac{4}{5} \quad q3 := \frac{4}{5} \quad q4 := 1 - q3$

$\nu := b2(q3) \quad \nu = 2.4 \quad p := (p1 \;\; p2) \quad q := (0 \;\; 0 \;\; q3 \;\; q4)$

$p = (0.4 \;\; 0.6) \quad q = (0 \;\; 0 \;\; 0.8 \;\; 0.2) \quad \nu = 2.4$

Решение матричных игр со смешанным расширением методами линейного программирования.

Рассмотрим игру $m \times n$, определяемую матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пусть для данной матричной игры $v_н \ne v_в$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока 1 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_m^*)$ и для игрока 2 ($y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots y_n^*$), при которых игроки достигали бы своего максимально гарантированного выигрыша.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то, по условию задачи, его выигрыш не может быть меньше цены игры v. Поэтому данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств:

Для первого игрока:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \ldots + a_{m1}x_m^* \geq v; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{m2}x_m^* \geq v; \\ \ldots \\ a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_2^* + \ldots + a_{mn}x_m^* \geq v; \\ x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^* = 1; \\ x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, \ldots x_m^* \geq 0. \end{cases}$$

Для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* + \ldots + a_{1n}y_n^* \leq v; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* + \ldots + a_{2n}y_n^* \leq v; \\ \ldots \\ a_{m1}y_1^* + a_{m2}y_2^* + \ldots + a_{mn}y_n^* \leq v; \\ y_1^* + y_2^* + \ldots + y_n^* = 1; \\ y_1^* \geq 0, y_2^* \geq 0, \ldots, y_n^* \geq 0. \end{cases}$$

Чтобы определить значение v, разделим обе части каждого из уравнений на v. И величину $\frac{x_i^*}{v}$ обозначим через x_i, а $\frac{y_j^*}{v}$ – через y_j. Для игрока 1 получим новую систему неравенств, из которой найдём значение $\frac{1}{v}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1; \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/v; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0. \end{cases}$$

Для игрока 1 необходимо найти максимальную цену игры v. Следовательно, значение $\frac{1}{v}$ должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\min F = \min \frac{1}{v} = \min (x_1 + x_2 + \ldots + x_m).$$

Для игрока 2 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение $\frac{1}{v}$:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1; \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1; \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/v; \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0. \end{cases}$$

Для игрока 2 необходимо найти минимальную цену игры v. Следовательно, значение $\frac{1}{v}$ должно стремиться к максимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\max F = \max \frac{1}{v} = \max (y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными: $x_i = \frac{x_i^*}{v}$, а $y_i = \frac{y_j^*}{v}$. Значения x_i^* и y_j^* не могут быть отрицательными, так как являются значениями вероятностей выбора стратегий игроков. Поэтому необходимо, чтобы значение цены игры v не было отрицательным. Цена игры вычисляется на основе коэффициентов выигрышей платёжной матрицы. Поэтому, для того, чтобы гарантировать условие неотрицательности для всех переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты матрицы были неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число *C*, соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина $v^* = v + C$.

Итак, у нас получилась пара двойственных задач линейного программирования. Для решения которых используется симплекс-метод.

Пример. Найти решение игры, определяемой следующей платёжной матрицей.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение:

Данная матричная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Решим задачу в смешанных стратегиях. Составим двойственную пару задач линейного программирования. В качестве прямой задачи рассмотрим задачу нахождения максимума функции $F = y_1 + y_2 + y_3$ при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \quad\quad \le 1, \\ y_1 \quad\quad + y_3 \le 1, \\ 2y_1 + y_2 \quad\quad \le 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0;$$

Двойственная задача: найти минимум функции $F = x_1 + x_2 + x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ 2x_1 \qquad + x_3 \ge 1, \\ \qquad\qquad x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0;$$

Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать какое-либо одно из них. Так как система ограничений первой задачи содержит лишь неравенства вида «$\le$», то лучше сначала найти решение этой задачи. Решение проводится изученным симплекс-методом. Оно приведено в следующей симплекс-таблице:

Базис	$C_б$	P_0	1	1	1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
P_5	0	1	1	0	1	0	1	0
P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
		0	-1	-1	-1	0	0	0
P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
		1	0	-1	0	0	1	0
P_2	1	1/2	1/2	1	0	1/2	0	0
P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
P_6	0	1/2	3/2	0	0	-1/2	0	1
		3/2	1/2	0	0	1/2	1	0

Исходная задача имеет оптимальный опорный план $Y = (0; 1/2; 1)$. Из последней строки также видно, что решением двойственной задачи является $X = (1/2; 1; 0)$.

Следовательно, цена игры

$$v = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{1}{1/2 + 1} = \frac{2}{3},$$

а оптимальные смешанные стратегии игроков

$$x^* = v \cdot X = (1/3;\ 2/3;\ 0),\ y^* = v \cdot Y = (0;\ 1/3;\ 2/3).$$

Рассмотрим пример решения матричной игры методом линейного программирования в Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \qquad m := \text{rows}(A) \quad m = 5 \qquad n := \text{cols}(A) \quad n = 5$$

$\text{ORIGIN} := 1$ $\quad i := 1..n \quad b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right)$ $\qquad A1 := A^T$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \beta := \min(b) \qquad \beta = -1$$

$$i := 1..m \qquad a_i := \min\left(A1^{\langle i \rangle}\right) \qquad a = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\alpha := \max(a) \qquad \alpha = -2 \qquad -2 \le v \le -1$

$$A := \begin{vmatrix} A - \alpha & \text{if } \alpha < 0 \\ A & \text{otherwise} \end{vmatrix} \qquad A1 := A^T$$

$x := a \qquad c := (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1) \qquad f(x) := c \cdot x \qquad f(x) = -22 \qquad c1 := c$

$y := b \qquad w(y) := c1 \cdot y \qquad w(y) = 8$

Given

$A1 \cdot x \ge c1^T \quad x \ge 0 \quad M := \text{Minimize}(f, x)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(M) = 1.667 \quad v1 := \frac{1}{f(M)} \quad v1 = 0.6$$

$$v := \begin{vmatrix} v1 + \alpha & \text{if } \alpha < 0 \\ v1 & \text{otherwise} \end{vmatrix} \qquad v = -1.4 \qquad P := M \cdot v1 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$A \cdot y \le c^T \qquad y \ge 0 \qquad M1 := \text{Maximize}(w, y)$

$$M1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.333 \\ 0 \\ 0 \\ 1.333 \end{pmatrix} \qquad w(M1) = 1.667 \quad v1 := \frac{1}{w(M1)}$$

$$v := \begin{vmatrix} v1 + \alpha & \text{if } \alpha < 0 \\ v1 & \text{otherwise} \end{vmatrix} \qquad v = -1.4 \qquad Q := M1 \cdot v1 \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$v = -1.4 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Порядок выполнения работы

1. Разработайте компьютерную программу, выполняющую следующие действия:

- Ввод платёжной матрицы (по вариантам, предложенным преподавателем);
- Определение нижней и верхней цены игры и вывод их значений, а также названий стратегий, в которых достигаются эти значения.
- Определение наличия или отсутствия оптимальной чистой стратегии в игре. В случае существования оптимальной чистой стратегии вывод информации о названиях стратегий игроков, в которых она достигается. В случае отсутствия оптимальной чистой стратегии вывод соответствующего сообщения.
- исключение доминируемых и дублирующих стратегий.

Варианты заданий

Варианты заданий

1

8	9	8	2	5
0	1	2	1	3
1	7	9	1	9

2

4	9	4	1	4
2	7	5	1	5
4	8	5	9	6

3

8	5	6	8	7
3	4	2	6	6
9	0	8	3	5

4

3	5	3	6	2
5	0	4	1	0
7	8	6	4	2

5

4	7	7	9	6
5	1	6	6	7
5	8	9	6	7

6

5	4	5	2	3
2	5	7	3	4
10	10	8	5	5

7

6	4	3
7	1	5
8	4	4
3	1	2
5	4	10

8

8	2	3
8	7	8
2	2	2
9	3	6
4	7	2

9

6	7	10
5	2	6
3	0	5
8	3	5
7	7	9

10

4	5	5	8	10
4	5	5	2	2
3	3	5	4	2

2. Фирма, с учетом трех возможных вариантов поведения партнера (стратегий B_1, B_2 и B_3) разработала две стратегии своей деятельности: A_1 и A_2. Прибыль фирмы a_{ij} в ситуации, когда она выбирает свою стратегию A_i, а партнер – стратегию B_j, приведена в заданной платежной матрице. Показать, что эта матрица не имеет седловой точки и найти оптимальное решение задачи в смешанных стратегиях а) графическим способом, б) сведением решения игры к задаче линейного программирования.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист,
- цель работы,
- листинг программы,
- результаты выполнения программы, содержащие платежную матрицу, нижнюю и верхнюю цены игры, названия стратегий игроков, в которых она достигается, матрицу с исключенными доминируемыми и дублирующими стратегиями,
- графическое решение задачи,
- решение задачи методами линейного программирования в табличном редакторе,
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Понятие стратегии.
2. Чистые и смешанные стратегии.
3. Выбор оптимальной стратегии.
4. Графическое решение задач
5. Решение матричных игр с помощью методов линейного программирования.
6. Игры с нулевой суммой.