

**МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)
ВОЛЖСКИЙ ФИЛИАЛ**

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИиТТП
Петрова А.В.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-
ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»**

Направление подготовки
23.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Направленность (профиль)
***Автоматизированные системы обработки информации и управления в
отраслях транспортно-дорожного комплекса***

Квалификация
Бакалавр

Кафедра: ИиТТП

Чебоксары

ОГЛАВЛЕНИЕ

РГР №1. Матрицы и определители. Операции над матрицами	3
РГР №2. Системы линейных алгебраических уравнений.....	5
РГР №3. Векторная алгебра	7
РГР №4. Аналитическая геометрия на плоскости	9
РГР №5. Аналитическая геометрия в пространстве	11
РГР №6. Линейные пространства. Базис и размерность.....	13
РГР №7. Линейные операторы.....	14
РГР №8. Квадратичные формы и их приложения	16
Требования к оформлению РГР	17
Критерии оценивания	17

РГР №1. Матрицы и определители. Операции над матрицами

Цель работы: Освоить основные операции с матрицами и вычисление определителей.

Типовые задания:

1. Выполнить действия над матрицами:

Даны матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

2. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Найти обратную матрицу:

Найти обратную матрицу:

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Выполнить проверку: $A \cdot A^{-1} = E$

4. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

РГР №2. Системы линейных алгебраических уравнений

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

Типовые задания:

1. Решить систему тремя методами (Крамера, матричным, Гаусса):

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

2. Исследовать систему на совместность и найти общее решение:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

3. Найти фундаментальную систему решений однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Решить систему с параметром:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Исследовать, при каких значениях параметра a система:

- имеет единственное решение;
- имеет бесконечно много решений;
- не имеет решений.

5. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

РГР №3. Векторная алгебра

Цель работы: Освоить операции с векторами и их геометрический смысл.

Типовые задания:

1. Даны векторы:

$$\vec{a} = (2, -1, 3), \quad \vec{b} = (1, 3, -2), \quad \vec{c} = (4, -2, 1)$$

Найти:

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

2. Проверить:

Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $2\vec{b} - \vec{c}$?

Ортогональны ли векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{c}$?

3. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям:

$$\vec{x} \perp \vec{a}, \quad \vec{x} \perp \vec{b}, \quad \vec{x} \cdot \vec{c} = 1$$

$$\text{где } \vec{a} = (1, 2, 1), \quad \vec{b} = (2, 1, -1), \quad \vec{c} = (1, -1, 1)$$

4. Проекция:

Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$

Разложить вектор $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

5. Векторы в физике:

Найти момент силы $\vec{F} = (3, -2, 1)$, приложенной в точке $A(1, 2, 0)$, относительно точки $B(2, 1, -1)$

РГР №4. Аналитическая геометрия на плоскости

Цель работы: Научиться работать с прямыми и кривыми второго порядка на плоскости.

Типовые задания:

1. Задачи на треугольник:

Даны вершины треугольника: $A(2, 1), B(-1, 3), C(3, 4)$

Найти:

- Уравнение стороны АВ.
- Уравнение высоты, опущенной из вершины С на сторону АВ.
- Уравнение медианы, проведенной из вершины А.
- Длину высоты.
- Точку пересечения медиан.
- Угол при вершине А.
- Площадь треугольника.

2. Кривые второго порядка (привести к каноническому виду, определить тип, найти параметры):

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

$$y^2 - 8x - 6y + 1 = 0$$

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

3. Взаимное расположение:

- Найти точки пересечения прямой $x - y + 1 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$
- Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ в точке $M\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Найти расстояние от точки $P(3, 2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1, -1)$ и $B(4, 3)$

4. Полярная система координат:

Построить кривую, заданную в полярных координатах:

$$\rho = 2(1 + \cos \varphi) \text{ (кардиоида)}$$

Найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

5. Линии уровня:

Построить линии уровня функции $z = x^2 - y^2$ для значений $z = 0, \pm 1, \pm 4$

РГР №5. Аналитическая геометрия в пространстве

Цель работы: Научиться работать с плоскостями и прямыми в трехмерном пространстве.

Типовые задания:

1. Плоскости:

Даны точки: $A(1, 2, -1), B(2, 0, 3), C(-1, 1, 2), D(3, 2, 1)$

Найти:

- Уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C
 - Уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC
 - Расстояние от точки D до плоскости ABC
 - Угол между плоскостью ABC и плоскостью $x + y - 2z + 4 = 0$
 - Уравнение плоскости, проходящей через прямую AB и точку D
- ### 2. Прямые в пространстве:

Дана прямая: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4}$ и точка $M(2, -3, 1)$.

Найти:

- Параметрические уравнения прямой.
- Точку пересечения прямой с плоскостью $2x - y + 3z - 5 = 0$.
- Уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно данной прямой
- Уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно данной прямой

3. Взаимное расположение:

Определить взаимное расположение прямых:

$$l_2 : \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$$

4. Поверхности второго порядка:

Определить тип поверхности и привести к каноническому виду:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

РГР №6. Линейные пространства. Базис и размерность

Цель работы: Освоить понятия линейной зависимости, базиса, перехода между базисами.

Типовые задания:

1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\vec{a}_1 = (1, 2, 3), \vec{a}_2 = (2, 3, 1), \vec{a}_3 = (3, 1, 2)$$

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{b}_2 = (1, 2, 3, 4), \vec{b}_3 = (1, 3, 5, 7), \vec{b}_4 = (1, 4, 7, 10)$$

2. Найти базис и размерность линейной оболочки:

$$L = \langle (1, 2, 1), (2, 3, 2), (3, 5, 3), (1, 1, 1) \rangle$$

3. Матрица перехода:

В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса:

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

$$e'_1 = (1, 1, 0), e'_2 = (1, 0, 1), e'_3 = (0, 1, 1)$$

– Найти матрицу перехода от базиса e к базису e' .

– Найти координаты вектора $\vec{x} = (3, -1, 2)$ в базисе e' .

4. Ортогонализация Грама-Шмидта:

Провести ортогонализацию системы векторов:

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 0), \vec{a}_2 = (1, 0, 1), \vec{a}_3 = (0, 1, 1)$$

5. Подпространства:

Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств:

$$U = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$$

$$V = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$$

РГР №7. Линейные операторы

Цель работы: Изучить свойства линейных операторов, их матрицы, собственные значения и векторы.

Типовые задания:

1. Матрица линейного оператора:

Линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– Найти образ вектора $\vec{x} = (1, 2, 3)$

– Найти ядро и образ оператора

2. Собственные значения и векторы:

Найти собственные значения и собственные векторы операторов, заданных матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Характеристический многочлен:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Для матрицы найти характеристический многочлен и проверить теорему Гамильтона-Кэли.

4. Приведение к диагональному виду:

Привести матрицу к диагональному виду, если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Операторы в евклидовом пространстве:

Проверить, является ли оператор ортогональным или самосопряженным:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

РГР №8. Квадратичные формы и их приложения

Цель работы: Изучить квадратичные формы, их приведение к каноническому виду и применение.

Типовые задания:

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

3. Исследовать на знакоопределенность:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Использовать критерий Сильвестра.

4. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду:

Определить тип кривой, привести к каноническому виду и построить:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

5. Приведение поверхности второго порядка:

Определить тип поверхности:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$$

6. Экстремум функции многих переменных:

Исследовать на экстремум функцию:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 8y + 5$$

Использовать матрицу Гессе.

Требования к оформлению РГР

1. Работа выполняется на листах формата А4 или в тетради.
2. Все вычисления должны быть представлены подробно, с пояснениями.
3. Графическая часть выполняется аккуратно, с использованием чертежных инструментов.
4. В конце каждой работы необходимо представить выводы.
5. Программная часть сдается в виде исходного кода и скриншотов результатов.

Критерии оценивания

- 5 баллов: Полное и правильное выполнение всех заданий, аккуратное оформление, грамотные выводы, работающий программный код.
- 4 балла: Правильное выполнение основных заданий, незначительные погрешности.
- 3 балла: Выполнено более половины заданий, но имеются существенные ошибки.
- 2 балла: Выполнено менее половины заданий.