

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)
ВОЛЖСКИЙ ФИЛИАЛ**

Теоретическая механика

Методические указания
для выполнения лабораторных работ
для студентов направления подготовки
23.03.01 Технология транспортных процессов

Чебоксары

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика как одна из важнейших дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей. Значимость теоретической механики определяется тем, что она является основной научной базой многих областей современной техники, фундаментальной дисциплиной, преподавание которой предусматривает овладение основными методами исследования и решения задач механики, развитие логического мышления, выработку умения самостоятельного расширения объема полученных знаний и проведения математического анализа прикладных задач.

Курс теоретической механики является основой, как профессионального образования инженера, так и успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами различных специальностей. Успешное изучение курса возможно только при соответствующей подготовке, что предполагает умение студента: вычислять проекции векторов на координатные оси, геометрически и аналитически вычислять скалярное и векторное произведение векторов; пользоваться системой прямоугольных декартовых координат; определять производные функции одного переменного и частные производные функций нескольких переменных; строить графики функций; знать понятие естественного трехгранника, кривизны и радиуса кривизны кривой; знать основы теории кривых 2-го порядка; интегрировать дифференциальные уравнения.

Одновременно методы механики как естественной науки, то есть науки о законах природы, позволяют изучить и объяснить целый ряд важных явлений в окружающем нас мире и способствуют дальнейшему росту и развитию естествознания в целом. На основе теорем и принципов механики решаются многие инженерные задачи, осуществляется проектирование новых машин, конструкций и сооружений. Качественное усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. Самостоятельное выполнение студентами заданий является важным средством повышения знаний. При добросовестном отношении к выполнению и защите работ студент получает прочные знания по предмету, что способствует формированию творческих умений, обеспечивающих последующее развитие знаний и умений в процессе самостоятельной профессиональной деятельности.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящие методические указания предназначены для оказания помощи студентам в развитии навыков самостоятельной работы и практического применения методов теоретической механики и лучшему усвоению сопутствующих предметов, таких как детали машин и основы конструирования, строительная механика и др.

В методических указаниях для студентов содержатся варианты лабораторных работ по темам:

- Задание 1 – Статика (С1);
- Задание 2 – Кинематика (К1 – К3);
- Задание 3 – Динамика (Д-2, Д-3).

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

В процессе изучения курса теоретической механики студенты выполняют ряд лабораторных работ, количество которых зависит от объема и содержания материала курса, предусмотренного рабочим учебным планом.

Общими заданиями являются:

С1 – определение реакций опор составной конструкции под действием плоской системы сил;

К1 – определение кинематических характеристик точки по заданным уравнениям ее движения;

К2 – определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки;

К3 – кинематический анализ плоского механизма;

Д2 – применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела;

Д3 – применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы;

К каждому заданию даются 10 рисунков и таблица с дополняющими текст задачи исходными данными. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.3. – это рисунок 3 к задаче С1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 представлены в первом столбце (или первой строке) таблицы. Во всех задачах студент выбирает номер рисунка согласно предпоследней цифре зачетной книжки, а номер условия из таблицы – по последней. Например, если номер зачетной книжки оканчивается числом 61, то берутся рисунок 6 и условие №1 из таблицы.

Каждая лабораторная работа выполняется на листах формата А4, причем запись ведется на одной стороне листа. На титульном листе указываются: тема расчетно-графической работы, номер варианта, фамилия и инициалы студента, фамилия и инициалы преподавателя.

На следующей странице выполняется чертеж с учетом условий решаемого варианта задачи, на котором должны быть выбраны координатные оси и показаны все необходимые векторные величины. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, на котором необходимо показать все векторы, как заданные, так и определяемые в ходе решения задания.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
ВЕРСИТЕТ (МАДИ)»
ВОЛЖСКИЙ ФИЛИАЛ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Лабораторная работа

(номер варианта)

Выполнил:

студент _____

специальности _____

курс _____

Проверил: _____

Чебоксары – 2024

С третьей страницы начинается выполнение лабораторных работ. Она должна сопровождаться краткими обоснованными пояснениями в виде применяемых теорем, формул; изложением последовательности расчетов и указанием полученного результата. Единицы измерения данных и получаемых в процессе решения величин указываются в обязательном порядке. В завершении работы должны быть представлены искомые величины в виде таблицы и проведена проверка полученных данных. В конце работы следует привести список использованной при выполнении задания литературы.

Замечание: при чтении текста каждой задачи следует учесть следующее:

- большинство рисунков дано без соблюдения масштабов, причем все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными и это в тексте задачи специально не оговаривается;

- все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят; катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения;

- все связи (если нет других оговорок) считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задачи и в таблице P_1, l_1, r_1 означают вес и размеры тела 1. Аналогично, в кинематике и динамике v_B, w_B означают скорость и ускорение точки В и т.д. Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении некоторых вариантов могут не понадобиться, они необходимы для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи, обращайтесь внимание только на относящиеся к вашему варианту.

Методические указания по выполнению задания даются для каждой задачи после ее текста. Приводится пример выполнения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения задачи, но не показать решение полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть выполнены с необходимыми пояснениями. В конце каждой задачи должны быть даны ответы.

Защита лабораторных работ проводится в назначенное преподавателем время. Если в процессе проверки были обнаружены недочеты, работа будет возвращена на доработку. Лабораторная работа должна быть аккуратно выполнена и оформлена. При защите лабораторной работы студенту необходимо знать основные законы, теоремы и формулы, используемые в работе.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Для обозначения векторных величин далее повсюду используется прямой шрифт с выделением, например, $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$; а для скалярных – курсив без выделения, например, M , F_x , v , ω .

Задача С1

Жесткая рама (рис.С1.0 – С1.9) закреплена неподвижно на двух опорах A и B . Опора A – неподвижный цилиндрический шарнир. Опора B – или подвижный шарнир (рис.С1.0 - С1.2, С1.5, С1.8) или невесомый стержень BO , который крепится к раме и к неподвижному основанию O шарнирами (рис.С1.3, С1.4, С1.6, С1.7, С1.9)

На раму действуют:

- пара сил с моментом M , величина которого указана в табл.1, а направление на рисунке;

- сосредоточенные силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$, которые имеют величины, направления и точки приложения, указанные в табл.1 (например, в условии 1 сила $\mathbf{F}_1$ имеет величину $F_1 = 10$ кН, направлена под углом 30° к горизонтальной оси и приложена в точке K рамы).

- равномерно распределенная сила, интенсивность которой $q = 2$ кН/м, а участок приложения показан на рисунке.

Определить реакции опор A и B .

При окончательных подсчетах принять $a = 0,6$ м.

Указания. С1 – задача на составление уравнений равновесия для тела, находящегося под действием плоской системы сил. Эти уравнения выражают необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела и имеют вид:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k m_O(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (1)$$

Для составления уравнений (1) предварительно требуется:

- заменить распределенную силу ее равнодействующей;
- освободить тело от наложенных на него связей, заменив их реакциями (силами);
- выбрать направления осей x и y для проектирования и моментную точку O .

В качестве моментной рекомендуется выбирать точку, в которой пересекаются линии действия двух реакций. В этом случае уравнение моментов будет содержать лишь одну неизвестную реакцию.

При вычислении момента силы $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, \dots, 4$) удобно разложить её на составляющие $\mathbf{F}_i'$, $\mathbf{F}_i''$, для каждой из которых плечо легко вычисляется, а затем воспользоваться теоремой Вариньона (о моменте равнодействующей) [1], с.40]:

$$m_O(\mathbf{F}_i) = m_O(\mathbf{F}_i') + m_O(\mathbf{F}_i'') \quad (2)$$

Образец выполнения

Условия задачи. Жесткая рама $ADEB$ закреплена на двух опорах: A (подвижный шарнир) и B (неподвижный шарнир). На раму действуют заданные активные силы:

- сосредоточенная сила F величиной 25 кН , приложенная в точке D ;
- пара сил с моментом $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (направление момента показано на рис.1 дуговой стрелкой);

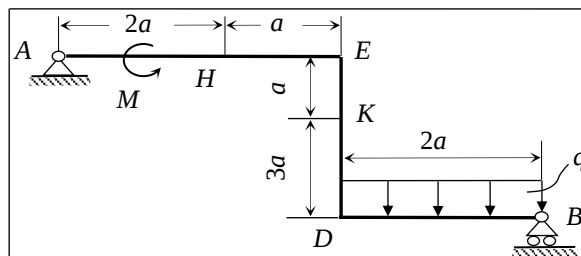


Рис.С1.0

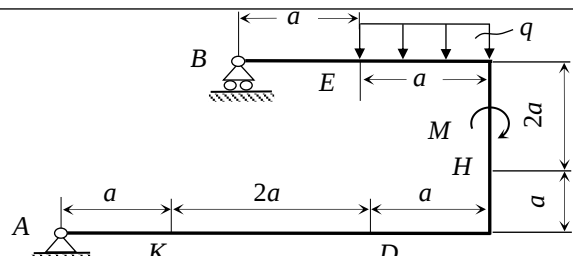


Рис.С1.1

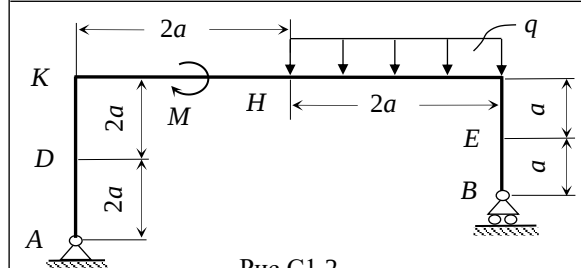


Рис.С1.2

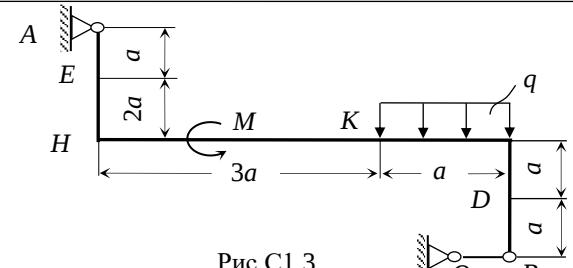


Рис.С1.3

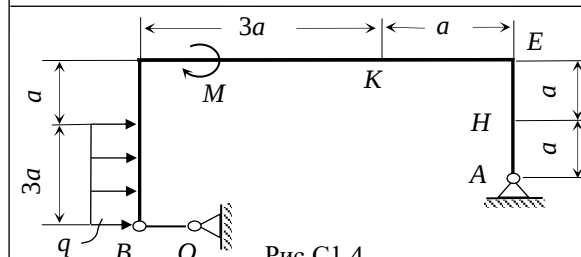


Рис.С1.4

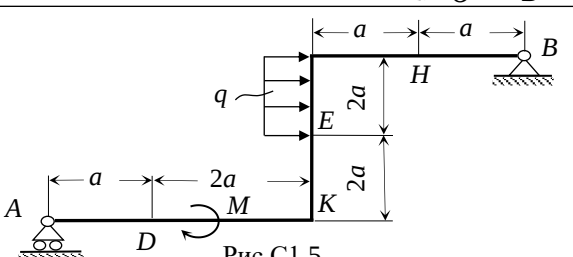


Рис.С1.5

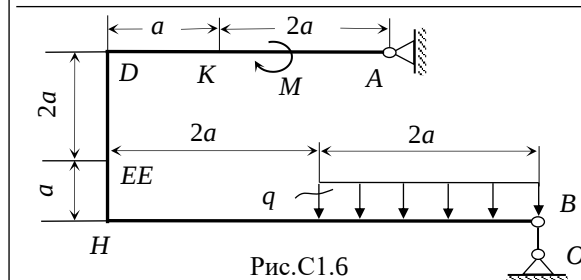


Рис.С1.6

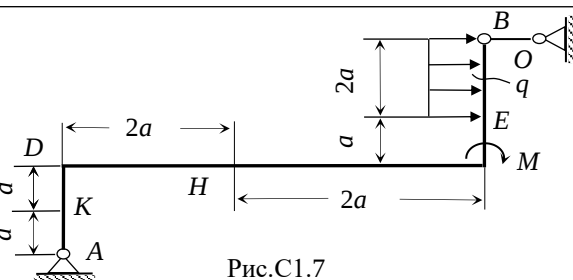


Рис.С1.7

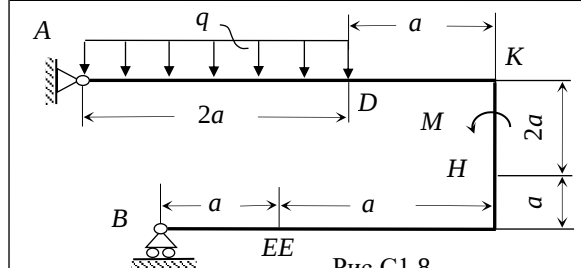


Рис.С1.8

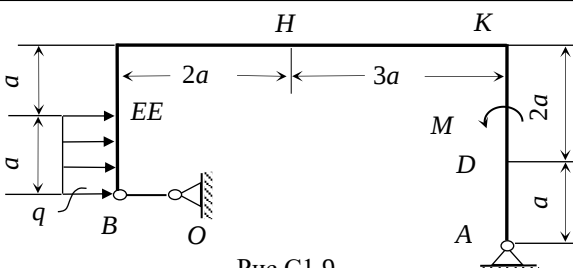
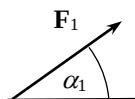
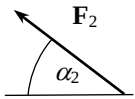
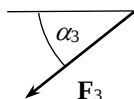
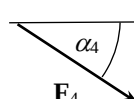


Рис.С1.9

Таблица 1.

Сила									Момент пары, кН·м
Номер условия	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$		
	Точка прилож.	α_1 , град.	Точка прилож.	α_2 , град.	Точка прилож.	α_3 , град.	Точка прилож.	α_4 , град.	
0	—	—	D	60	E	45	—	—	10
1	K	30	—	—	—	—	H	45	14
2	—	—	H	45	K	30	—	—	20
3	D	60	—	—	—	—	E	30	26
4	—	—	K	30	E	60	—	—	12
5	H	60	—	—	D	30	—	—	24
6	—	—	E	30	—	—	K	60	30
7	D	45	—	—	H	60	—	—	22
8	—	—	H	60	—	—	D	30	18
9	E	30	—	—	—	—	K	60	38

- равномерно распределенная на участке EB сила интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$.

Размеры и углы показаны на рис.1; $a = 0,5 \text{ м}$.

Определить реакции опор A и B .

Решение. Рассмотрим равновесие рамы $ADEB$. Изобразим на рисунке действующие на раму активные силы. Равномерно распределенную на участке EB силу заменим её равнодействующей Q , величина которой

$$Q = q \cdot EB = q \cdot 2a = 20 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} = 20 \text{ кН},$$

а линия действия проходит через середину участка EB (рис.1).

Освободим раму от связей, наложенных в точках A и B , заменив эти связи силами - реакциями. Реакцию неподвижного шарнира R_B , направление которой неизвестно, разложим на две составляющие: горизонтальную - X_B и вертикальную - Y_B . Реакция R_A подвижного шарнира A (шарнира на катках) направляется перпендикулярно опорной плоскости катков - вертикально.

Для составления уравнений равновесия (1) введем координатные оси xu и выберем в качестве моментной точку B , через которую проходят линии действия двух неизвестных реакций X_B и Y_B .

Записываем уравнения проекций сил на оси x и y :

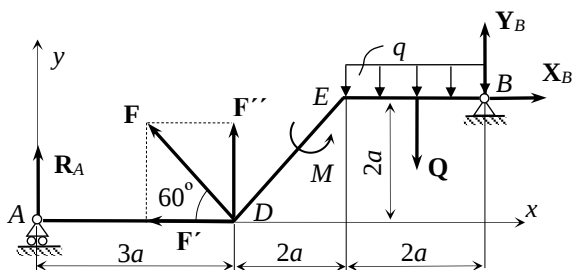


Рис.1

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad X_B - F \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum_k F_{ky} = 0, \quad Y_B + R_A + F \cdot \cos 30^\circ - Q = 0. \quad (3)$$

Действующая на раму пара сил в уравнениях проекций не учитывается, поскольку сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

Записываем уравнение моментов:

$$\sum_k m_B(\mathbf{F}_k) = 0, \quad M - R_A \cdot 7a - F \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a - F \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a + Q \cdot a = 0. \quad (4)$$

Здесь для вычисления момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки B использовалась теорема Вариньона (2). Сила $\mathbf{F}$ была разложена на две составляющие: $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}''$ (рис.1), величины которых $F' = F \cdot \cos 60^\circ$, $F'' = F \cdot \cos 30^\circ$. После этого момент силы $\mathbf{F}$ был найден как сумма моментов этих составляющих:

$$m_B(\mathbf{F}) = m_B(\mathbf{F}') + m_B(\mathbf{F}'') = -F' \cdot 2a - F'' \cdot 4a = -F \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a - F \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a$$

Подставляем в составленные уравнения равновесия (2), (3), (4) числовые значения заданных величин:

$$\begin{aligned} X_B - 25 \cdot 0,5 &= 0; & Y_B + R_A + 25 \cdot (\sqrt{3}/2) - 20 &= 0; \\ 50 - R_A \cdot 7 \cdot 0,5 - 25 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 - 25 \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot 4 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему линейных уравнений (5), находим числовые значения искомых реакций.

Ответ: $R_A = 1,4$ кН, $X_B = 12,5$ кН, $Y_B = -2,7$ кН (отрицательный знак указывает, что сила Y_B имеет направление, противоположное изображенному на рис.1)

Задача К1

По заданным в декартовых координатах в табл.4 уравнениям движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$ найти вид её траектории.

Для заданного момента времени $t_1 = 1$ с определить :

- положение точки;
- скорость и ускорение точки;

Таблица 2.

Первая цифра шифра						
	0	$x = 4\sin(\pi t/6)$	3	$x = 4 - 2t$	7	$x = 12 \cos(\pi t/6)$
	1	$x = 3 - 6\sin(\pi t/6)$	4	$x = 2t + 4$	8	$x = 6\cos(\pi t/6) - 2$
	2	$x = 3\sin(\pi t/6) - 2$	5	$x = - 2t$	9	$x = 4 - 8\cos(\pi t/6)$
			6	$x = 2t + 2$		
Вторая цифра шифра	0	$y = 4 - 9 \cos(\pi t/6)$	$y = t^2 - 2$		$y = - 4 \cos(\pi t/3)$	
	1	$y = 2 - 3 \cos(\pi t/3)$	$y = 8 \cos(\pi t/4)$		$y = 10 \sin(\pi t/6)$	
	2	$y = 4 - 6 \cos^2(\pi t/6)$	$y = 4 + 2 t^2$		$y = 12 \sin^2(\pi t/6)$	
	3	$y = 12 \cos(\pi t/6)$	$y = 2 (t + 1)^2$		$y = 2 - 4 \sin(\pi t/6)$	
	4	$y = 9 \cos(\pi t/3) + 5$	$y = 2 + 2 \sin(\pi t/4)$		$y = 8 + 12 \sin(\pi t/3)$	
	5	$y = - 10 \cos(\pi t/6)$	$y = 3 t^2 - 2$		$y = 3 \sin(\pi t/6)$	
	6	$y = 8 \cos(\pi t/6) - 3$	$y = 3 - 4 \cos(\pi t/4)$		$y = 6 \sin^2(\pi t/6) - 7$	
	7	$y = - 9 \cos^2(\pi t/6)$	$y = 3 - 4\cos(\pi t/4)$		$y = 6 \cos(\pi t/3)$	
	8	$y = 6 \cos(\pi t/3) - 4$	$y = 2 t^3$		$y = 4 - 9 \sin(\pi t/6)$	
	9	$y = 2 - 2 \cos(\pi t/6)$	$y = 2 \sin(\pi t/4)$		$y = 8 \cos(\pi t/3) + 6$	

Указания. К1 – задача на определение кинематических характеристик движения точки.

В задаче требуется по заданным уравнениям движения точки найти и изобразить её положение на координатной плоскости в момент времени $t = t_1$. Следует также построить соответствующие этому моменту времени векторы скорости и ускорения точки.

Образец выполнения

Условия задачи. Даны уравнения движения точки:

$$x = -2 \cos(\pi t/4) + 3, \quad y = 2 \sin(\pi t/8) - 1 \quad (x, y - \text{в см}, t - \text{в с}). \quad (1)$$

Определить положение точки, а также скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Найдем положение точки в момент времени $t = t_1 = 1$ с. Для этого вычисляем значения координат:

$$x_1 = x(t_1) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 1\right) + 3 = -2 \cdot \cos 45^\circ + 3 = 1,59 \text{ см},$$

$$y_1 = y(t_1) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot 1\right) - 1 = 2 \cdot \sin 22,5^\circ - 1 = -0,24 \text{ см}$$

На рис.2 этому положению соответствует точка M .

Находим выражения для проекций вектора $\mathbf{v}$ скорости точки на координатные оси, используя известные формулы кинематики:

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(-2 \cos \left(\frac{\pi}{4} t \right) + 3 \right) = \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} t \right),$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{8} t \right) - 1 \right) = \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{8} t \right)$$

(здесь и далее точки над переменными означают дифференцирование по времени).

Находим модуль вектора скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Вычисляем значения при $t = t_1 = 1 \text{ с}$:

$$v_x = \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \cdot 1 \right) = \frac{\pi \cdot \sin 45^\circ}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,41}{4} = 1,11 \text{ см/с},$$

$$v_y = \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{8} \cdot 1 \right) = \frac{\pi \cdot \cos 22,5^\circ}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,924}{4} = 0,73 \text{ см/с},$$

$$v = \sqrt{(1,11)^2 + (0,73)^2} = 1,33 \text{ см/с}.$$

Аналогично находим проекции вектора **a** ускорения точки на координатные оси и модуль ускорения [2], с.103:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} t \right) \right) = \frac{\pi^2}{8} \cos \left(\frac{\pi}{4} t \right),$$

$$a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{8} t \right) \right) = -\frac{\pi^2}{32} \sin \left(\frac{\pi}{8} t \right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Значения, соответствующие $t = t_1 = 1 \text{ с}$ будут:

$$a_x = \frac{\pi^2}{8} \cos \left(\frac{\pi}{4} \cdot 1 \right) = \frac{\pi^2 \cdot \cos 45^\circ}{8} = \frac{(3,14)^2 \cdot \sqrt{2}}{16} = 0,87 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -\frac{\pi^2}{32} \sin \left(\frac{\pi}{8} \cdot 1 \right) = -\frac{\pi^2 \cdot \sin 22,5^\circ}{32} = \frac{(3,14)^2 \cdot 0,38}{32} = -0,12 \text{ см/с}^2,$$

$$a = \sqrt{0,87^2 + (-0,12)^2} = 0,88 \text{ см/с}^2.$$

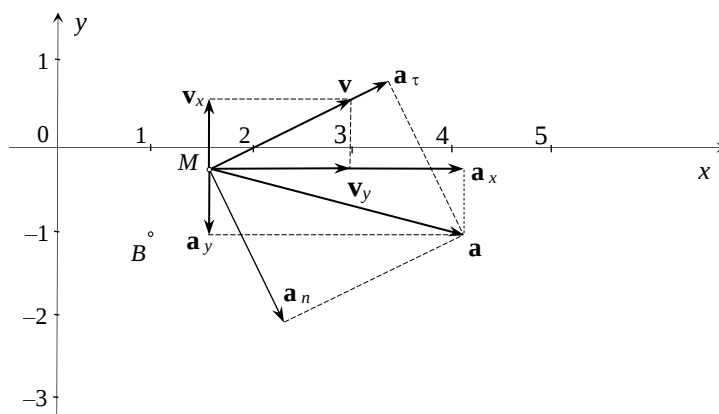


Рис.2

Ответ: $M(1,59; -0,24)$ - положение точки; $\mathbf{v}(1,11; 0,73)$, $v = 1,33 \text{ см/с}$ - скорость; $\mathbf{a}(0,87; -0,12)$, $a = 0,88 \text{ см/с}^2$ - ускорение.

Задача К2

Плоский механизм состоит из жестких стержней 1–4 и ползуна B , соединенных шарнирно; стержни 1 и 4 шарнирно связаны с неподвижными опорами O_1, O_2 (рис. К2.0 – К2.9). Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$, значения которых приведены в табл.5. Дуговые стрелки на рисунках указывают направление отсчета углов при построении чертежа. Точки D и K являются серединами соответствующих звеньев. Длины стержней: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,8$ м.

В столбце "Скорости" табл.3 задана величина угловой скорости стержня 1 или 4, либо линейной скорости ползуна B . Вектор скорости $\mathbf{v}_B$ направлен от точки B к b , а угловые скорости ω_1, ω_4 – против хода часовой стрелки.

Определить скорости двух точек механизма и угловую скорость стержня, указанные в столбце "Найти" таблицы 3.

Таблица 3.

Вариант	Углы, град					Скорости			Найти
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, \text{с}^{-1}$	$\omega_4, \text{с}^{-1}$	$v_B, \text{м/с}$	
0	30	150	120	0	60	2	—	—	v_B, v_E, ω_2
1	60	60	60	90	120	—	3	—	v_A, v_D, ω_3
2	0	120	120	0	60	—	—	10	v_A, v_E, ω_2
3	90	120	90	90	60	3	—	—	v_B, v_E, ω_2
4	0	150	30	0	60	—	4	—	v_B, v_A, ω_2
5	60	150	120	90	30	—	—	8	v_A, v_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	5	—	—	v_B, v_E, ω_3
7	90	150	120	90	30	—	5	—	v_A, v_D, ω_3
8	0	60	30	0	120	—	—	6	v_A, v_E, ω_2
9	30	120	120	0	60	4	—	—	v_B, v_E, ω_3

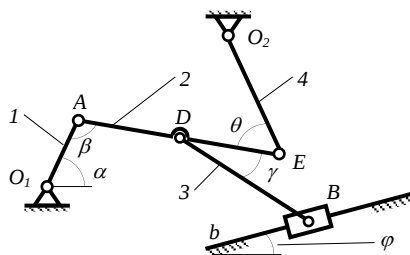


Рис. К2.0

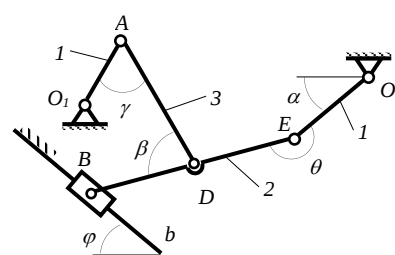


Рис. К2.1

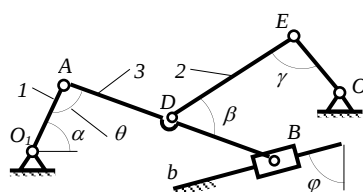


Рис. К2.2

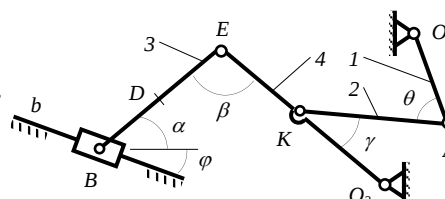


Рис. К2.3

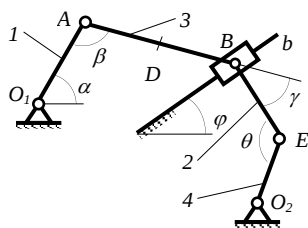


Рис. К2.4

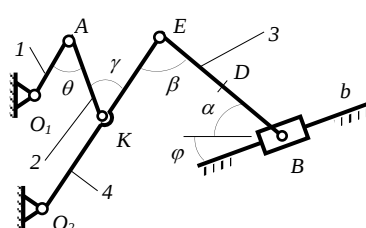


Рис. К2.5

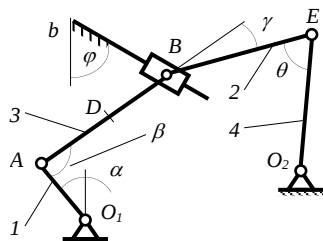


Рис. К2.6

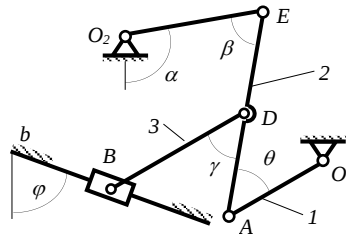


Рис. К2.7

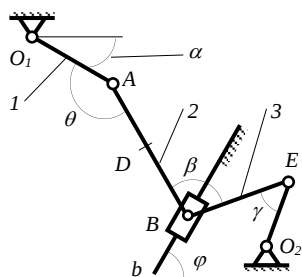


Рис. К2.8

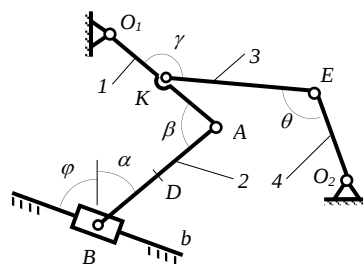


Рис. К2.9

Указания. К2 – задача на использование методов кинематического анализа плоских механизмов. Расчет кинематических характеристик начинается с того звена механизма, движение которого задано в условии задачи. Затем расчет ведётся «по цепочке» с переходом от одного звена механизма к другому, связанному с ним. Для нахождения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует использовать теорему о проекциях скоростей двух точек твердого тела, а также свойства мгновенного центра скоростей.

Построение чертежа удобнее начать с того стержня, положение которого определяется углом α . Направляющие ползуна B для большей наглядности рекомендуются изображать так, как показано на рис.8б.

Образец выполнения

Условия задачи. Плоский механизм состоит из стержней 1–4 и ползуна B ; O_1 и O_2 неподвижные шарнирные опоры (рис.8а). Длины стержней: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,8$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 0$, $\theta = 30^\circ$. Известна угловая скорость стержня 1: $\omega_1 = 5$ с⁻¹.

Определить скорости $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_E$, ω_3 .

Решение. Изображаем положение механизма в соответствии с заданными углами (рис.3б).

Из условий задачи ясно, что стержень 1 вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 5 \text{ с}^{-1}$ вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O_1 . Следовательно, модуль вектора $\mathbf{v}_A$ скорости точки A находится по известной формуле

$$v_A = \omega_1 \cdot AO_1 = \omega_1 \cdot l_1 = 5 \text{ с}^{-1} \cdot 0,4 \text{ м} = 2 \text{ м/с},$$

а направление $\mathbf{v}_A$ перпендикулярно AO_1 .

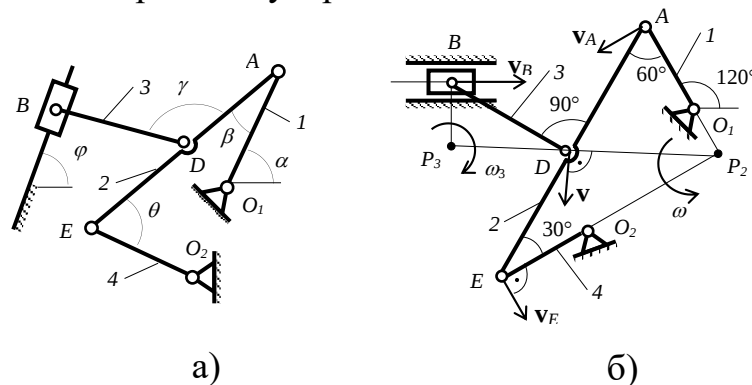


Рис. 3

Определим теперь $\mathbf{v}_E$ - скорость точки E , которая принадлежит стержню 2. Для её нахождения достаточно знать скорость какой-либо другой точки стержня 2, например $\mathbf{v}_A$, и направление вектора $\mathbf{v}_E$.

Заметим, что точка E принадлежит стержню O_2E , который вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O_2 , следовательно, $\mathbf{v}_E \perp EO_2$. Для нахождения величины v_E используем теорему о равенстве проекций скоростей точек A и E твердого тела (стержня 2) на отрезок AE , который их соединяет [3], с.131:

$$\text{пр}_{\overline{AE}}(\mathbf{v}_A) = \text{пр}_{\overline{AE}}(\mathbf{v}_E). \quad (1)$$

Предварительно установим, в какую сторону направлен вектор $\mathbf{v}_E$. Проекции скоростей $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_E$ на отрезок AE должны иметь одинаковые знаки, следовательно вектор $\mathbf{v}_E$ направлен вниз, и звено 4 вращается против хода часовой стрелки (рис.3б). Из равенства проекций (1) получим:

$$v_A \cos 30^\circ = v_E \cos 60^\circ,$$

$$\text{откуда } v_E = v_A \cos 30^\circ / \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с} \cdot 0,866 / 0,5 = 3,4 \text{ м/с}.$$

Точка B принадлежит стержню BD . Для определения v_B сначала найдем скорость точки D , являющейся общей для стержней 2 и 3. Величину скорости v_D найдем, построив мгновенный центр скоростей (МЦС) звена AE - точку P_2 , лежащую на пересечении перпендикуляров к векторам $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_E$, восстановленных из точек A и E . Заметим, что векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_E$ перпендикулярны стержням 1 и 4, следовательно точка P_2 лежит на пересечении прямых AO_1 и EO_2 (рис.3б). По направлению вектора $\mathbf{v}_A$ определяем направление угловой скорости ω_2 вращения звена AE вокруг МЦС P_2 . Вектор $\mathbf{v}_D$ перпендикулярен отрезку P_2D и направлен в сторону вращения AE вокруг P_2 (рис.3б). Величину v_D можно найти из пропорции [4], с.133:

$$v_D / P_2D = v_A / P_2A. \quad (2)$$

Заметим, что $\triangle AP_2E$ – прямоугольный с углами при вершинах A и E соответственно 30° и 60° , следовательно $P_2A = AE \cdot \sin 30^\circ = AD$. Тогда $\triangle AP_2D$ является равносторонним ($P_2A = P_2D$) и согласно пропорции (2)

$$v_D = v_A = 2 \text{ м/с}.$$

Точка B звена BD принадлежит также и ползуну B , движущемуся поступательно вдоль горизонтальных направляющих. Следовательно, направление $\mathbf{v}_B$ известно. Восстанавливаем из точек B и D перпендикуляры к скоростям $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_D$ и находим точку их пересечения P_3 – МЦС звена BD . По направлению вектора $\mathbf{v}_D$ определяем направление угловой скорости ω_3 вращения стержня BD вокруг P_3 . Вектор $\mathbf{v}_B$ также направлен в сторону вращения BD вокруг P_3 (рис.3б). Величины угловой скорости звена 3 и скорости точки B найдем, используя свойства МЦС.

$$\omega_3 = v_D / P_3D = v_D / (l_3 \cos 30^\circ) = 1,6 \text{ с}^{-1},$$

$$v_B = \omega_3 \cdot P_3B = \omega_3 (l_3 \sin 30^\circ) = 1,1 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_B = 1,1 \text{ м/с}$, $v_E = 3,5 \text{ м/с}$, $\omega_3 = 1,6 \text{ с}^{-1}$.

Задача К3

Прямоугольная пластина (рис. К3.0 – К3.5) или круглая пластина радиуса $R = 60 \text{ см}$ (рис. К3.6 – К3.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \varphi(t)$. Ось вращения либо проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка (рис. К3.0 – К3.3, К3.8, К3.9), либо проходит через точки O_1 , O и лежит в плоскости рисунка (рис. К3.4 – К3.7).

Вдоль отрезка BD прямоугольной пластины или по ободу круглой пластины движется точка M . Закон ее относительного движения, выраженный в естественной форме $AM = s(t)$ задан в табл.4.

Определить абсолютную скорость $\mathbf{v}_a$ точки M в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$.

Исходные данные приведены в табл.6, где значения времени t во всех уравнениях движения указаны в секундах.

Указания. К3 – задача на применение теоремы сложения скоростей точки, участвующей в сложном движении:

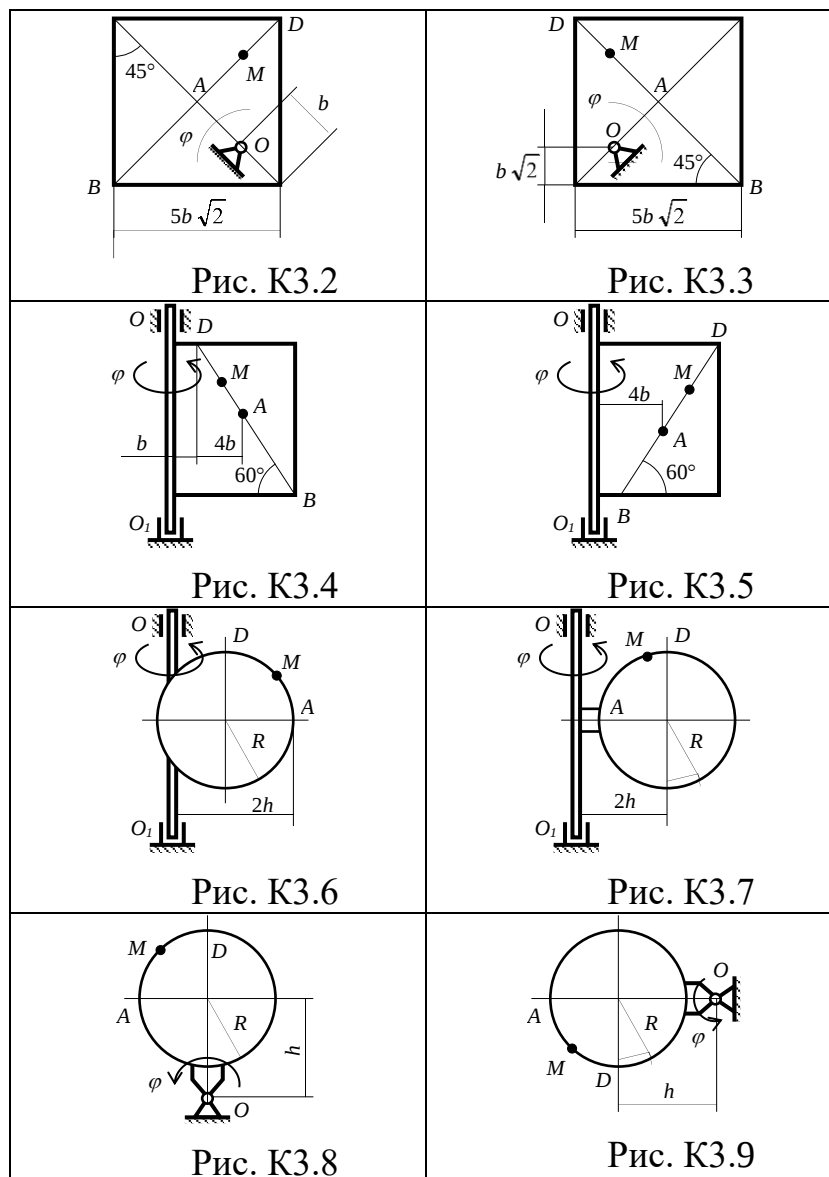
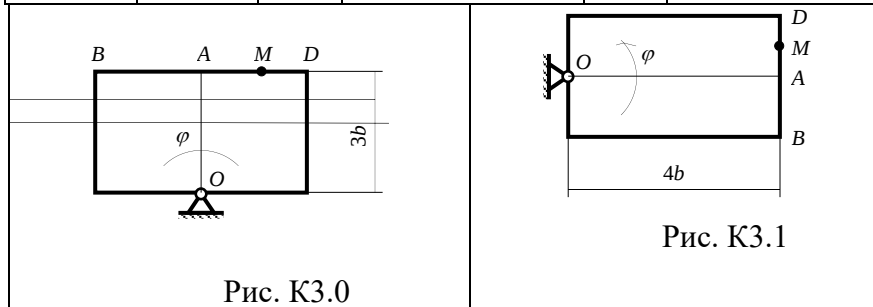
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e \quad 1)$$

Здесь переносным движением является вращение пластины по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Таблица 4.

Вариант	$\varphi = \varphi(t)$, рад	Для рис. К3.0 – К3.5		Для рис. К3.6 – К3.9	
		b , см	$AM = s(t)$, см	h	$AM = s(t)$, см
0	$-2t^2$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^4 - 3t^2)$
1	$4t^2$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^3 - 2t^2)$
2	$3t^2$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{6} R(3t - t^2)$
3	$-4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$0,5 R$	$\frac{\pi}{2} R(t^3 - 2t^2)$
4	$-3t^2$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3} R(3t^2 - t)$

5	$2 t^2$	12	$50 (3 t - t^2) - 64$	R	$\frac{2\pi}{3} R (2 t^2 - t^3)$
6	$4 t^2$	20	$40 (t - 2 t^3) - 40$	$1,5 R$	$\frac{\pi}{2} R (t - 2 t^2)$
7	$-5 t^2$	10	$80 (t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3} R (2 t^2 - 1)$
8	$2 t^2$	8	$60 (t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6} R (t - 5 t^2)$
9	$-5 t^2$	16	$40 (3 t^2 - t^4) - 32$	R	$\frac{\pi}{2} R (2 t^2 - t^3)$



Относительным движением является движение точки M относительно пластины по закону $AM = s(t)$.

Решение задачи следует начать с определения положения точки M на пластине, соответствующего моменту времени $t_1 = 1$ с. Показанное на рис. К3.0 – К3.9 положение точки M соответствует положительному значению дуговой координаты s . В случае $AM = s(t_1) < 0$, точку M следует изображать по другую сторону от точки A .

При движении точки M по дуге (рис. К3.6-К3.9) для определения её положения в момент времени $t_1 = 1$ с следует найти центральный угол между радиусами CA и CM для этого момента времени.

Образец выполнения

Условия задачи. Прямоугольная пластина (рис.4а) вращается вокруг оси O_1O согласно уравнению $\varphi = -4t^2$ (рад); положительное направление отсчета угла φ указано на рис.4а дуговой стрелкой. Точка M совершает относительное перемещение вдоль отрезка AD по закону $AM = s = 60(t^2 - t) + 20$ см.

Определить абсолютную скорость v_a точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, состоящее из относительного движения точки вдоль диагонали AD пластины и пе-

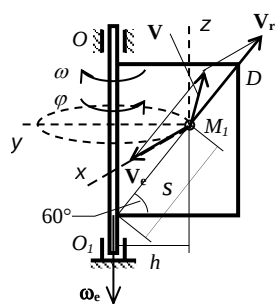


Рис. 4

реносного вращения вместе с самой пластиной.

Установим положение точки M на диагонали AD в момент времени $t_1 = 1$ с.

Относительное движение точки M происходит по закону

$$s = 60(t^2 - t) + 20.$$

Полагая здесь $t = 1$ с, получим $s = 20$ см. Изображаем соответствующее положение точкой M_1 на рис. К9 ($M_1 = 20$ см).

Находим векторы относительной скорости v_r и ускорения a_r . Дифференцируя зависимость $s(t)$ по времени, находим выражение для значения относительной скорости

$$v_r = \dot{s} = 60(2t - 1) \quad (2)$$

откуда для момента времени $t_1 = 1$ с получаем $v_r = 60$ см/с.

Находим вектор переносной скорости v_e . Уравнение переносного вращения пластины: $\varphi = -4t^2$ (рад). Положительное направление отсчета угла φ указано на рис.9а дуговой стрелкой с буквой φ .

Дифференцируя зависимость $\varphi(t)$ по времени, найдем выражения для переносной угловой скорости

$$\omega_e = \dot{\varphi} = -8t \text{ (с}^{-1}\text{)} \quad (4)$$

Для момента времени $t = 1$ с из выражения (4) имеем $\omega_e = -8 \text{ с}^{-2}$. Отрицательное значение производной (4) указывает, что направление вращения пластины противоположно положительному направлению отсчета угла φ ; покажем направление вращения пластины на рис.4 дуговой стрелкой с буквой ω_e . Вектор

переносной угловой скорости ω_e направлен вдоль оси вращения OO_1 пластины так, что с его конца вращение наблюдается происходящим против хода часовой стрелки. Изобразим вектор ω_e на рис.4а.

Переносная скорость точки M в момент времени t_1 - это скорость точки M_1 пластины. При вращении пластины её точка M_1 описывает окружность радиуса $h = AM_1 \sin 30^\circ = 10$ см. Тогда модуль вектора переносной скорости

$$v_e = |\omega_e| h = 80 \text{ см/с} \quad (6)$$

Находим абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M , используя теоремы сложения (1).

При нахождении модуля абсолютной скорости учитываем перпендикулярность векторов $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ (рис.4). Для момента времени $t_1 = 1$ с с учетом (2) и (6) получаем

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ см/с} = 1 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_a = 1 \text{ м/с}$.

Задача Д2

Механическая система состоит двух ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней $R_4 = 0,3$ м, $r_4 = 0,1$ м и $R_5 = 0,2$ м, $r_5 = 0,1$ м, грузов 1, 2 и катка 3, связанных гибкой нерастяжимой нитью.

Массы шкивов m_4, m_5 следует считать равномерно распределенными по их внешним ободам; каток 3 - сплошной однородный цилиндр радиусом $r_3 = 0,1$ м.

Под действием силы $\mathbf{F}$, модуль которой зависит от перемещения s точки её приложения (т.е. $F = f(s)$), система приходит в движение из состояния покоя.

При вращении шкивов 4 и 5 на них действуют пары сил сопротивления с постоянными моментами M_4 и M_5 соответственно. Коэффициент трения скольжения грузов 1, 2 о плоскость $f = 0,1$.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы $\mathbf{F}$ равно σ . Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы 2, где обозначено: ω_4 - угловая скорость шкива 4, V_1 - скорость груза 1, V_{C3} - скорость центра масс катка 3 и т.д.

Таблица 5

Номер усло-вия	m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	m_4 кг	m_5 кг	M_4 Нм	M_5 Нм	$F = f(s)$ Н	σ м	Най- ти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2+3s)$	1,0	V_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5+2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3+4s)$	0,8	V_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4+5s)$	0,6	V_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3+2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3+5s)$	1,6	V_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2+5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8+3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2+5s)$	1,6	V_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3+2s)$	1,4	V_2

Указания. Д2 - задача на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.

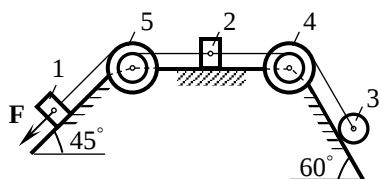


Рис.Д2.0

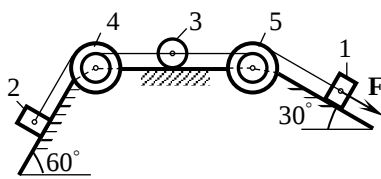


Рис.Д2.1

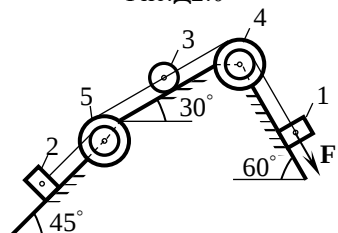


Рис.Д2.2

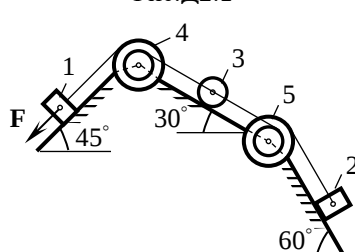


Рис.Д2.3

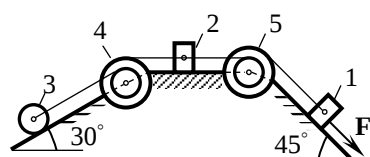


Рис.Д2.4

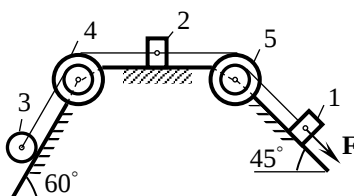


Рис.Д2.5

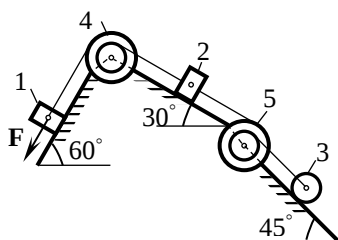


Рис.Д2.6

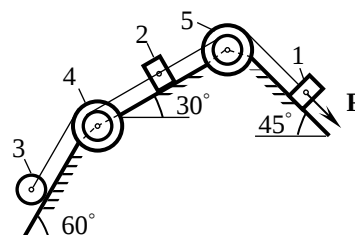


Рис.Д2.7

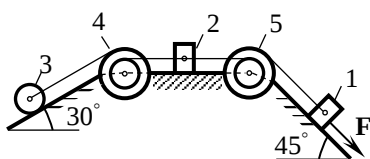


Рис.Д2.8

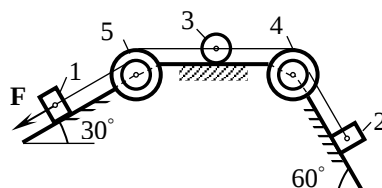


Рис.Д2.9

$$T - T_0 = \sum_k A(\mathbf{F}_k)$$

При решении задачи следует учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел. Эту энергию надо выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую требуется определить в задаче.

При вычислении кинетической энергии катящегося катка 3 для установления зависимости между его угловой скоростью ω_3 и скоростью его центра масс V_{C3} следует использовать мгновенный центр скоростей катка.

Рассматриваемая система является неизменяемой (тела - абсолютно твердые, нити - нерастяжимые), поэтому суммарная работа внутренних сил равна нулю [5], с.308. Следовательно, в правой части (1) учитываются лишь работы

внешних сил. Все перемещения, необходимые для вычисления работ, следует выражать через заданное перемещение σ .

Если по данным таблицы $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$, то соответствующее тело можно на рисунке не изображать.

Образец выполнения

Условия задачи. Массы тел системы, изображенной на рис.3: $m_1=4$ кг,

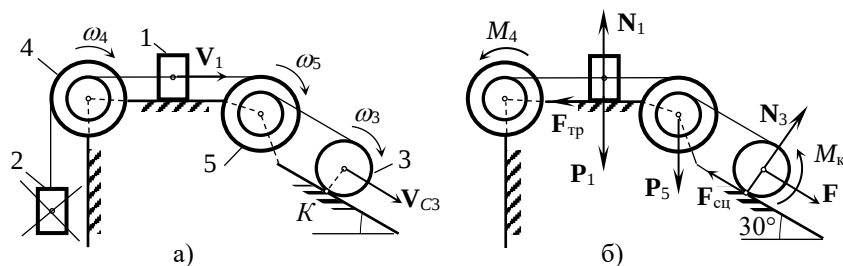


Рис.5

$m_2 = 0$ (поэтому тело 2 на рис.5б не показано), $m_3 = 2$ кг, $m_4 = 0$, $m_5 = 5$ кг. Радиусы : $R_5 = 0,2$ м , $r_5 = 0,1$ м , $r_4 = 0,1$ м ; $r_3 = 0,1$ м.

Сила $F = 2(1+2s)$ Н (s – перемещение катка 3 в м). Момент пары сил сопротивления $M_4 = 0,6$ Нм. Коэффициенты трения: $f = 0,2$; $\delta = 4$ мм.

Определить значение скорости V_1 груза 1, в тот момент времени когда перемещение катка достигнет величины $\sigma = 2$ м .

Решение. Для определения скорости V_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы (1).

Поскольку в начальный момент времени система находилась в покое, то соответствующая кинетическая энергия $T_0 = 0$. Кинетическая энергия T системы в конечном состоянии (когда перемещение катка $\sigma = 2$ м) равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 \quad (2)$$

сюда не включены кинетические энергии тел 2 и 4, массы которых равны нулю.

Учитывая, что тело 1 движется поступательно, тело 3 совершает плоскопараллельное движение, а тело 5 - вращается вокруг неподвижной оси, получим :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} I_{C3} \omega_3^2, \quad T_5 = \frac{1}{2} I_5 \omega_5^2 \quad (3)$$

Все входящие сюда скорости выражаем через искомую V_1 , используя известные из кинематики соотношения:

$$\omega_5 = \frac{V_1}{R_5}, \quad V_{C3} = \omega_5 \cdot r_5 = V_1 \frac{r_5}{R_5}, \quad \omega_3 = \frac{V_{C3}}{r_3} = V_1 \frac{r_5}{R_5 r_3} \quad (4)$$

Входящие в (3) центральные осевые моменты инерции катка 3 (однородного цилиндра) и шкива 5 (масса равномерно распределена по внешнему радиусу R_5) вычисляем по формулам :

$$I_{C3} = 0,5 m_3 r_3^2, \quad I_5 = m_5 \cdot R_5^2 \quad (5)$$

Подставив выражения (4), (5) для величин ω_5 , V_{C3} , ω_3 , I_{C3} , I_5 в (3), получим для кинетической энергии (2) всей системы :

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{3}{2} m_3 \frac{r_5^2}{R_5^2} + m_5 \right) V_1^2 \quad (6)$$

Теперь найдем сумму работ всех сил, действующих на тела системы, на их перемещениях из начального положения в конечное.

Работа переменной силы $F(s)$ на конечном перемещении σ находится в виде интеграла :

$$A(F) = \int_0^{\sigma} F(s) ds = \int_0^{\sigma} 2(1 + 2s) ds = 2(\sigma + \sigma^2) \quad (7)$$

Работы сил тяжести тел системы :

$$A(P_3) = m_3 g h_{C3} = m_3 g \sigma \sin 30^\circ, \quad (8)$$

где h_{C3} - вертикальное перемещение центра тяжести катка 3;

$$A(P_1) = A(P_5) = 0, \quad (9)$$

т.к. перемещения центров тяжести тел 1, 5 вдоль вертикали - нулевые.

Работа силы трения $F_{тр}$ груза 1 о плоскость :

$$A(F_{тр}) = -F_{тр} \cdot s_1 = -f N_1 s_1, \quad (10)$$

где $N_1 = m_1 g$ - нормальная реакция плоскости, по которой перемещается груз;
 s_1 - перемещение груза 1.

Работа пары сил сопротивления вращению шкива 4 :

$$A(M_4) = -M_4 \varphi_4, \quad (11)$$

где φ_4 - угол поворота шкива 4 .

Пара сил сопротивления качению катка 3 имеет постоянный момент $M_k = \delta N_3$ и совершает работу:

$$A(M_k) = -M_k \varphi_3 = -\delta N_3 \varphi_3, \quad (12)$$

где $N_3 = m_3 g \cos 30^\circ$ - нормальная реакция плоскости качения; φ_3 - угол поворота катка 3.

Работы остальных внешних сил равны нулю:

$A(F_{сц}) = A(N_3) = 0$, поскольку точка приложения сил $F_{сц}$ и N_3 является мгновенным центром скоростей катка 3;

$A(N_1) = 0$, т.к. сила N_1 перпендикулярна перемещению точки её приложения;

работа реакций осей шкивов (эти силы на рис.5.б не показаны) равна нулю, поскольку точки их приложения не перемещаются.

Все необходимые для вычисления работ линейные и угловые перемещения выражаем через заданное перемещение σ центра катка 3, учитывая что зависимости между перемещениями будут подобны зависимостям (4) между соответствующими скоростями :

$$\varphi_3 = \frac{\sigma}{r_3}; \quad \varphi_5 = \frac{\sigma}{r_5}; \quad s_1 = \varphi_5 R_5 = \frac{\sigma R_5}{r_5}; \quad \varphi_4 = \frac{s_1}{r_4} = \frac{\sigma R_5}{r_5 r_4} \quad (13)$$

Находим сумму работ (7) - (12), учитывая (13) :

$$\begin{aligned} \sum A_k &= 2(\sigma + \sigma^2) + m_3 g \sigma \sin 30^\circ - \delta m_3 g \cos 30^\circ \varphi_3 - f m_1 g s_1 - M_4 \varphi_4 = \\ &= 2(\sigma + \sigma^2) + m_3 g \sigma \left(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ \frac{\delta}{r_3} \right) - f m_1 g \frac{\sigma R_5}{r_5} - M_4 \frac{\sigma R_5}{r_5 r_4} \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим полученные выражения (6) и (14) в уравнение (1) :

$$\frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{3}{2} m_3 \frac{r_5^2}{R_5^2} + m_5 \right) V_1^2 = 2(\sigma + \sigma^2) + m_3 g \sigma \left(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ \frac{\delta}{r_3} \right) -$$

$$- f m_1 g \frac{\sigma R_5}{r_5} - M_4 \frac{\sigma R_5}{r_5 r_4}$$

Из последнего равенства выражаем скорость груза 1 :

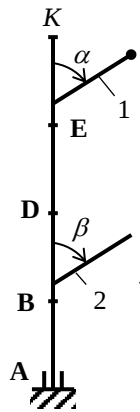


Рис.Д3.0

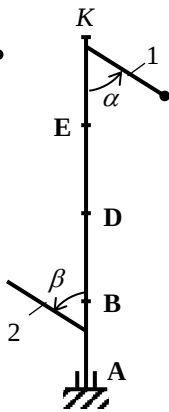


Рис.Д3.1

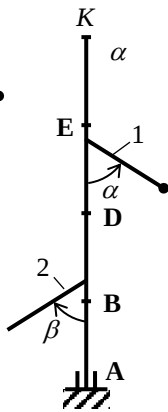


Рис.Д3.2

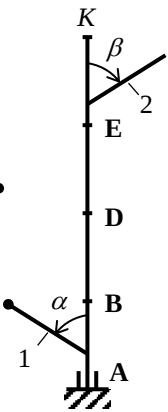


Рис.Д3.3

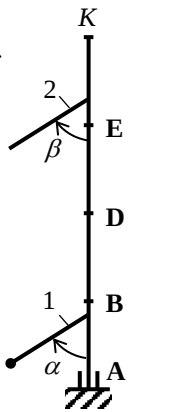


Рис.Д3.4

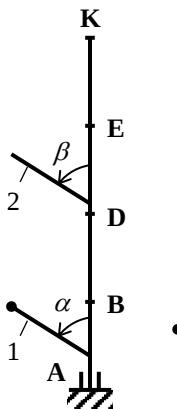


Рис.Д3.5

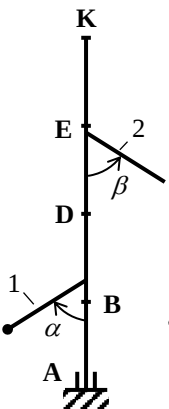


Рис.Д3.6

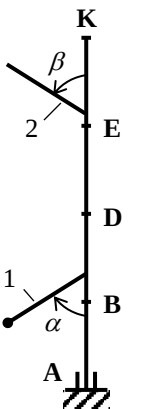


Рис.Д3.7

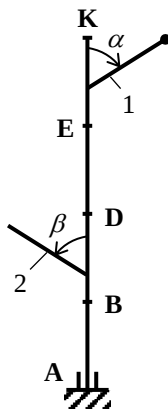


Рис.Д3.8

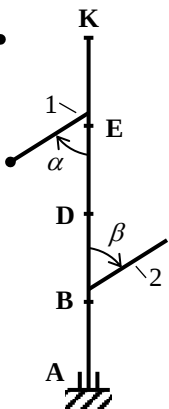


Рис.Д3.9

$$V_1 = \sqrt{\frac{\sigma \left[2(1 + \sigma) + m_3 g \left(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ \frac{\delta}{r_3} \right) - f m_1 g \frac{R_5}{r_5} - M_4 \frac{R_5}{r_5 r_4} \right]}{0,5 \left(m_1 + 1,5 m_3 \frac{r_5^2}{R_5^2} + m_5 \right)}}$$

Подставляя числовые значения заданных величин получим $V_1 = 0,91 \text{ м/с}$.

Задача Д3

Вертикальный вал AK (рис.Д3.0-Д3.9), закрепленный подпятником в точке A и цилиндрическим шарниром в точке, указанной во втором столбце табл. 3, вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$.

К валу жестко прикреплены: невесомый стержень 1 длиной $L_1 = 0,4 \text{ м}$ с точечной массой $m_1 = 6 \text{ кг}$ на конце; однородный стержень 2 длиной $L_2 = 0,6 \text{ м}$ массой

$m_2 = 4 \text{ кг}$. Оба стержня расположены в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу а также значения углов α , β между валом и стержнями даны табл.3. Расстояния $AB = BD = DE = EK = b = 0,4 \text{ м}$.

Определить реакции опор вала, и найти динамическую составляющую этих реакций.

Таблица 6

Номер условия		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Подшипник в точке		B	D	E	K	B	D	E	K	D	E
Крепление	Стержень 1 в точке	D	B	D	D	E	K	B	E	E	K
	Стержень 2 в точке	K	E	B	E	D	B	K	B	K	D
α , град.		0	45	60	75	90	30	45	60	75	90
β , град.		45	0	75	30	60	45	30	75	60	45

Указания. ДЗ - задача на применение принципа Даламбера [6], с.344-346. При её решении следует обратить внимание на то, что величина и направление равнодействующей Φ^* сил инерции частиц стержня 2 определяется ускорением a_C его центра масс, однако линия действия этой равнодействующей через центр масс стержня не проходит.

Следует также помнить, что при определении динамических составляющих реакций статические нагрузки (в данной задаче - силы тяжести) не учитываются.

Образец выполнения

Условия задачи. Невесомый вертикальный вал AB , вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. С валом под углом $\alpha = 30^\circ$ жестко скреплен однородный стержень DN массой $m_1 = 3 \text{ кг}$ длиной $L = 0,6 \text{ м}$, несущий на конце точечный груз N массой $m_2 = 2 \text{ кг}$ (рис.4). Расстояния: $DB = b = 0,4 \text{ м}$, $AD = 2b = 0,8 \text{ м}$.

Определить реакции подпятника A , подшипника B и найти динамические составляющие этих реакций.

Решение. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала AB , стержня DN и груза N .

Согласно принципу Даламбера все действующие на систему внешние силы вместе с силами инерции образуют уравновешенную систему сил.

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, реакцию подпятника $\mathbf{R}_A$ и реакцию подшипника $\mathbf{R}_B$. Обе реакции считаем расположенными в одной плоскости с валом AB и стержнем DN ; для упрощения вычислений разложим $\mathbf{R}_A$ на вертикальную и горизонтальную составляющие X_A , Y_A (рис.4).

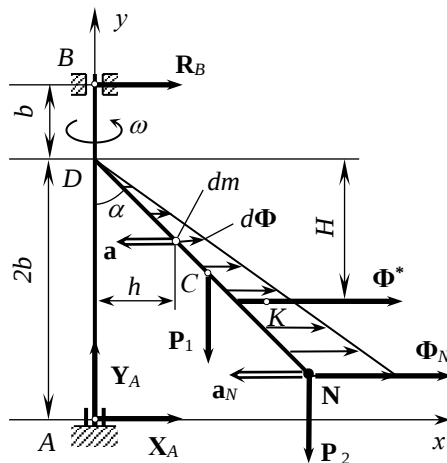


Рис.6

Определим силы инерции частиц стержня DN и груза N .

При равномерном вращении вала ($\omega = \text{const}$) элемент стержня DN с массой dm имеет ускорение a , направленное к оси вращения (рис.6) и численно равное $a = \omega^2 h$ (h – расстояние от элемента до оси вращения).

Сила инерции этого элемента $d\Phi = -(dm)a$ направлена противоположно его ускорению a (рис.4) и имеет величину

$$d\Phi = (dm)a = (dm)\omega^2 h,$$

пропорциональную расстоянию h от элемента до оси. Следовательно, эпюра сил инерции частиц

стержня – треугольник, а их равнодействующая Φ^* проходит через центр тяжести K этого треугольника на расстоянии $H = (2/3)L \cos \alpha$ от точки D (рис.6).

Равнодействующая сил инерции Φ^* равна их главному вектору R^Φ , который определяется по формуле:

$$R^\Phi = -ma_C, \quad (C - \text{центр масс стержня}) \quad (1)$$

поэтому равнодействующая сил инерции стержня имеет величину

$$\Phi^* = m_1 a_C = m_1 \omega^2 h_C = m_1 \omega^2 (L/2) \sin \alpha = 180 \text{ Н}.$$

Сила инерции точечного груза N определяется по формуле $\Phi_N = -ma_N$ и, следовательно, направлена от оси вращения (рис.6). Ее величина

$$\Phi_N = m_2 a_N = m_2 \omega^2 L \sin \alpha = 240 \text{ Н}$$

Выберем вращающиеся вместе с валом AB координатные оси Ax , Ay так, чтобы стержень DN постоянно лежал в плоскости Axy .

Все активные силы (силы тяжести) и силы инерции лежат в плоскости Axy , поэтому уравновешивающие их реакции R_A , R_B также должны располагаться в плоскости Axy , что и было учтено при изображении реакций (рис.4).

Составляем для полученной плоской системы сил уравнения кинестатики, выражающие условия ее уравновешенности:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & X_A + R_B + \Phi^* + \Phi_N &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_A - P_1 - P_2 &= 0; \\ \sum m_A(F_k) &= 0, & -R_B(3b) - P_1(0,5L \sin \alpha) - P_2(L \sin \alpha) - \\ & & -\Phi^*(2b - H) - \Phi_N(2b - L \cos \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя в (2) значения всех заданных и вычисленных величин и решая эту систему уравнений, найдем реакции опор A и B вала:

$$X_A = -287,9 \text{ Н}; \quad Y_A = 49 \text{ Н}; \quad R_B = -132,1 \text{ Н}.$$

Знаки "-" здесь означают, что векторы X_A и R_B имеют направления, противоположные указанным на рис.6.

Чтобы определить динамические составляющие реакций, полагаем в (2) статические нагрузки P_1 , P_2 равными нулю. После этого находим динамические реакции опор:

$$X_A^{\text{дин}} = -296,5 \text{ Н}; \quad Y_A^{\text{дин}} = 0; \quad R_B^{\text{дин}} = -123,5 \text{ Н}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2004, - 416с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.1. - М. : Высшая школа, 1984, - 368с.
3. Воронков И.М. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1964, - 596с.
4. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1968, - 420с.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. М.: Наука, 1967, - 512с.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /Под общей редакцией проф. А.А. Яблонского. М.: Высшая школа, 1985, - 367с.
7. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.:Наука, 1986, - 448с.
8. Сборник коротких задач по теоретической механике /Под ред. О.Э.Кепе. М.: Высшая школа, 1989, - 368с.