

**МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)
ВОЛЖСКИЙ ФИЛИАЛ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ
по дисциплине
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»**

Кафедра: ИиТТП

Чебоксары

Оглавление

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РГР	3
СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА РГР	3
ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ.....	3
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И СРОКИ СДАЧИ	4
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ И ЗАЩИТА РАБОТЫ	5
Элементы дискретной математики.....	5
Векторная и линейная алгебра.....	6
Аналитическая геометрия	7
Пределы.....	8
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	8
ТИПОВЫЕ ТЕМЫ ЗАДАНИЙ	9
Список использованных источников	11

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РГР

Цель работы:

- Углубленное изучение разделов высшей математики;
- Развитие навыков самостоятельного решения прикладных и теоретических задач;
- Формирование компетенций в области математического моделирования и использования программных пакетов (при необходимости).

Задачи:

- Систематизировать теоретический материал по теме;
- Решить предложенные задачи с подробным обоснованием каждого шага;
- Оформить результаты в соответствии с государственными стандартами;
- Защитить работу перед преподавателем, ответив на контрольные вопросы.

СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА РГР

Расчетно-графическая работа должна содержать следующие элементы в указанном порядке:

- Титульный лист.
- Задание (текст варианта с исходными данными).
- Оглавление (с указанием страниц).
- Введение (краткое описание цели работы и рассматриваемых методов, 0.5–1 стр.).
- Основная часть:
 - Теоретические сведения (кратко, основные формулы и теоремы, используемые в решении).
 - Решение задач (подробное, пошаговое, с пояснениями).
 - Графическая часть (чертежи, графики функций, схемы), выполненная аккуратно или в специализированном ПО.
- Заключение (выводы по результатам работы, трудности, возникшие при решении).
- Список использованных источников (не менее 3–5 наименований).
- Приложения (листинги программ, большие таблицы, дополнительные чертежи — при необходимости).

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

Оформление РГР должно соответствовать ГОСТ 7.32-2017 «Отчет о научно-исследовательской работе» и ГОСТ 2.105-95 «Общие требования к текстовым документам».

1. Параметры страницы:

Формат бумаги: А4 (210×297 мм).

Поля: левое — 30 мм, правое — 10 мм, верхнее — 20 мм, нижнее — 20 мм.

Ориентация: книжная (для графиков допускается альбомная).

2. Текст и шрифты:

Шрифт: Times New Roman.

Размер шрифта: 14 пт.

Междустрочный интервал: 1,5.

Выравнивание текста: по ширине.

Абзацный отступ: 1,25 см.

Нумерация страниц: сквозная, внизу по центру (на титульном листе номер не ставится, но учитывается).

3. Математические формулы:

Формулы набираются в редакторе формул (Microsoft Equation, MathType, LaTeX).

Формулы выделяются в отдельную строку и нумеруются арабскими цифрами в круглых скобках у правого поля.

Ссылки на формулы в тексте даются в скобках, например: «...по формуле (3)».

Расшифровка символов приводится непосредственно под формулой в той же последовательности.

4. Иллюстрации и графики:

Рисунки нумеруются (Рисунок 1, Рисунок 2...) и подписываются снизу по центру.

На графиках должны быть указаны названия осей, масштаб и единицы измерения.

Графики могут быть выполнены от руки (карандашом, с использованием линейки) или в ПО (Mathcad, MATLAB, Python, Excel, GeoGebra).

5. Объем работы:

Рекомендуемый объем: 15–25 страниц (без учета приложений).

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И СРОКИ СДАЧИ

1. Выбор варианта: Студент получает индивидуальный вариант задания у преподавателя или выбирает его согласно методу, указанному в начале семестра (например, по двум последним цифрам зачетной книжки).

2. Консультации: В случае возникновения трудностей студент может обратиться к преподавателю на практических занятиях или в консультационные часы.

3. Сроки:

- Начало работы: [Дата]

- Промежуточный контроль (черновик): [Дата]

- Окончательная сдача: [Дата]

4. Сдача работы: Работа сдается в печатном или электронном виде (PDF) через систему LMS университета.

5. Академическая честность: Заимствование решений из интернета или у других студентов без указания источника, а также использование генеративных нейросетей без анализа результатов, расценивается как нарушение академической этики и влечет снижение оценки или недопуск к защите.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ И ЗАЩИТА РАБОТЫ

1. Допуск к защите:

Работа допускается к защите, если она выполнена в полном объеме, оформлена согласно требованиям и загружена в систему проверки на плагиат (при наличии).

2. Процедура защиты:

Защита проходит в устной форме.

Студент должен:

- Кратко доложить о содержании работы (3–5 минут).
- Ответить на 2–3 теоретических вопроса по теме РГР.
- Объяснить ход решения ключевых задач.
- Продемонстрировать понимание использованных методов.

3. Критерии оценивания (по 5-балльной шкале):

Оценка	Критерии
5 (Отлично)	Все задачи решены верно, оформление безупречно, студент свободно отвечает на вопросы, владеет теоретическим материалом, использованы дополнительные источники или ПО.
4 (Хорошо)	Задачи решены верно, есть мелкие недочеты в оформлении, студент отвечает на вопросы с незначительными ошибками или подсказками.
3 (Удовлетворительно)	Задачи решены с вычислительными ошибками, но ход решения верен; оформление небрежное; ответы на вопросы неполные.
2 (Неудовлетворительно)	Работа не выполнена, решения отсутствуют или неверны, студент не владеет материалом, выявлен плагиат.

Элементы дискретной математики

Задание 1. Даны множества $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{3,4,5,6\}$ Найдите:

1. $A \cup B$ (объединение)
2. $A \cap B$ (пересечение)
3. $A \setminus B$ (разность)
4. $|P(A)|$ (мощность булеана множества A)

Задание 2. Сколько различных 5-значных чисел можно составить из цифр $\{1,2,3,4,5\}$, если:

1. Цифры не могут повторяться
2. Цифры могут повторяться

Задание 3. (Принцип Дирихле) В ящике лежат 10 красных, 15 синих и 20 зеленых носков. Вы достаете носки наугад в темноте. Какое минимальное количество носков нужно достать, чтобы гарантированно получить хотя бы одну пару одного цвета?

Задание 4. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Задача о друзьях и незнакомцах / Числа Рамсея $R(3,3)$).

Задание 5. Решите сравнение по модулю: $3x \equiv 5 \pmod{7}$ Найдите наименьшее неотрицательное целое решение x .

Векторная и линейная алгебра

Задание 1. Найти значение многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

следующими способами:

- 1) по правилу Крамера;
- 2) методом Гаусса,
- 3) представив её в виде матричного уравнения.

Задание 3. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 4. Указать число решений системы однородных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + ax_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

в зависимости от параметра a .

Задание 5. Доказать совместность системы уравнений и найти ее общее решение.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

и найти её общее решение.

Задание 2. Ортонормировать методом Грамма-Шмидта матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Даны три последовательные вершины A, B и C трапеции $ABCD$, у которой $\vec{AB} = 2\vec{DC}$. Найти:

- 1) четвертую ее вершину D ;
- 2) угол между диагоналями трапеции и длину проекции одной из них на другую;
- 3) угол между боковыми сторонами и длину проекции одной из них на другую;
- 4) площадь трапеции и площадь параллелограмма, построенного на диагоналях трапеции, если $A(1;2;3), B(2;8;2), C(0;5;1)$.

Задание 4. Даны три некопланарных единичных вектора $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, таких, что $(\vec{m}, \vec{n}) = (\vec{m}, \vec{p}) = 120^\circ, (\vec{n}, \vec{p}) = 60^\circ$. Найти их проекции на вектор $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$.

Аналитическая геометрия

Задание 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 2. Определить вид кривых и построить их:

- 1) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 49$
- 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$
- 3) $x^2 = -8y$
- 4) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$

Задание 3. Составить уравнение параболы, вершина которой расположена в начале координат, если она симметрична оси Ox и проходит через точку $A(9;6)$.

Задание 4. Привести к каноническому виду и построить кривую второго порядка:

$$x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0.$$

Задание 5. Построить кривую в полярной системе координат $r = \frac{5}{2} \sin \varphi$.

Задание 6. Определить и построить кривую, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6(0 < x < 8\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

Задание 7. Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси, сделать чертеж.

Пределы

Задание 1. Доказать, используя определение, следующий предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

Задание 2. Вычислить следующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{x^2 + -x - 3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3x^2 + 6x + 2} - \sqrt{3x^2 - 6x - 4} \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 3}{3x^2 - 7} \right)^{6x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)^{(\cos x - \sin x)}$$

Задание 3. Найти точки разрыва функций и определить их характер:

$$1) y = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ 5, & -1 \leq x < 0, \\ 5 - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Задание 1. Вычислить производные первого порядка от заданных функций:

$$1) y = \arccos^2 \ln 7x \cdot 5^{\sqrt{x^2 - 7x}} + \frac{\sqrt[5]{x^2 - \sin^3 \sqrt{x}}}{\operatorname{ctg} \ln \sqrt{x+1}},$$

$$2) y = \sqrt[7]{\frac{(x+3)^5 (x-1)^3}{(x^2 - 4x)^2}}.$$

Задание 2. Вычислить производные первого и второго порядка от функций, заданных

- а) неявно,
б) параметрически,
если

$$а) y^2 = x \sin y,$$

$$б) \begin{cases} x = t^2 - \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$$

Задание 3. Найти наилучшее линейное приближение данной функции $y = \sqrt{\arcsin 2x}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Задание 4. Используя правила Лопиталя-Бернулли, вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + e^{x^2} - 1}{\sin^5 3x}$.

Задание 5. Исследовать функцию

$$y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}.$$

и построить ее график.

ТИПОВЫЕ ТЕМЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

- 1) Записать множество A целых решений неравенства $-3 < x < 2$.
- 2) Описать множество A точек окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2.
- 3) Для каждой из следующих систем уравнений определить, каким является множество её действительных решений - пустым, конечным или бесконечным:
 а) $\{(x+y=1, @x-y=0); \}$ б) $\{(x+y=1, @2x+2y=3); \}$ в) $\{(x+y=1, @-x-y=-1.); \}$
- 4) Найти множества действительных решений уравнений
 $(x^2-3x+2)^{10} + (x^2-5x+6)^{20} = 0$; $(x^2-3x+2)(x^2-5x+6) = 0$.
- 5) Найти дополнения, разности, произведение и симметрическую разность промежутков $(-\infty; 3]$ и $(2; 5)$, представив искомые множества в виде промежутков или сумм непересекающихся промежутков.
- 6) Доказать равенство $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- 7) Доказать равенство $(A \cap B) = A \cup B$.
- 8) Доказать, что для любых трех множеств A, B и C : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
- 9) Проверить, является ли формула $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow B)$ тождественно истинной.
- 10) Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,
 где $x_n = (3n^2 + 2)/(4n^2 - 1)$, $a = 3/4$.
- 11) Вычислить:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^3 + (n-1)^3)/(n^3 - 3n)$.
- 12) Вычислить:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)} - \sqrt[3]{(n^3+2)})/(\sqrt{(7n+2)} - \sqrt{(5n^5+2)})$.
- 13) Вычислить:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{((n+2)(n+1))} - \sqrt{((n-1)(n+3))})$.
- 14) Пользуясь определением, доказать, что
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 11$, где $f(x) = (6x^2 - 13x + 2)/(x - 2)$.
- 15) Вычислить
 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x - 1)/(x^3 + 2x^2 - x - 2)$.
- 16) Вычислить
 $\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{(9+2x)} - 5)/(\sqrt[3]{x} - 2)$.
- 17) Вычислить
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2$.
- 18) Вычислить
 $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin 2x / \ln(e - x) - 1$.
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - e^x)/(\sin 2x - \sin x)$.
- 20) Найти асимптоты графика функции $f(x) = (3x^2)/(x-1)$.
- 21) Найти производную функции $y = 7x^4 + 2\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^2} - 4/x^2$.
- 22) Найти производную функции $y = 2^{\sqrt{x^4 - 3x - 1}}$.
- 23) Найти производную функции $y = \ln^3 x^2$.
- 24) Найти производную функции $y = \sqrt{(\sin 2x + \cos 3x)}$.
- 25) Найти производную функции $y = \arcsin \sqrt{x}$.
- 26) Найти производную функции $y = -(\operatorname{ch} x)/(2\operatorname{sh}^2 x) - 1/2 \ln \operatorname{th} x/2$.

- 27) Найти производную функции $y = x^{(e^x)} \cdot x^9$.
- 28) Найти $y_{xx''}$, если $\arctg y - y + x = 0$.
- 29) Найти производную второго порядка $y_{xx''}$ от функции, заданной параметрическими уравнениями:
 $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \arctg t. \end{cases}$
- 30) Найти дифференциал функции $f(x) = \ln(1 + e^{10x}) - \arctg e^{5x}$. Вычислить dy при $x=0, dx=0,2$.
- 31) Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (\pi/4x - \pi/2x(e^{\pi x} + 1))$.
- 32) Вычислить $\lim_{x \rightarrow a} (2 - x/a)^{\tan \pi x/2a}$.
- 33) Найти экстремумы функции $f(x) = (x-5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$.
- 34) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ на отрезке $[1/e; 1]$.
- 35) Найти точки перегиба графика функции $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.
- 36) Провести полное исследование и построить график функции $f(x) = x^3 / (3(x+2)^2)$.
- 37) Провести полное исследование и построить график функции $f(x) = (x+2) \cdot e^{(-x)}$.

Вариант 2

- 1) Найти интеграл $\int \sqrt{(\sin x)} \cos x \, dx$.
- 2) Найти интеграл $\int (x \, dx)/(x^2-1)$.
- 3) Найти интеграл $\int (e^{(\arctg t)} dt)/(1+t^2)$.
- 4) Найти интеграл $\int \arctg x \, dx$.
- 5) Найти интеграл $\int x^3 \ln x \, dx$.
- 6) Найти интеграл $\int (x^2+7x-5)\cos 2x \, dx$.
- 7) Найти интеграл $\int (6x-7)/(x^2+4x+13) \, dx$.
- 8) Найти интеграл $\int (x+2)/(x^2+6x+10)^2 \, dx$.
- 9) Найти интеграл $\int (x^4-4x^3+x^2+16x-1)/(x-1)(x+2)(x-3) \, dx$.
- 10) Найти интеграл $\int (x^2+2)/((x+1)^2(x-2)) \, dx$.
- 11) Найти интеграл $\int (x \, dx)/(x^3+1)$.
- 12) Найти интеграл $\int dx/(2 \sin x + 3 \cos x + 4)$.
- 13) Найти интеграл $\int (\cos^3 x \, dx)/(1+\sin^2 x)$.
- 14) Найти интеграл $\int \sin^{10} x \cdot \cos^3 x \, dx$.
- 15) Найти интеграл $\int \cos^2 3x \cdot \sin^4 3x \, dx$.
- 16) Найти интеграл $\int dx/(\cos x \sin^3 x)$.
- 17) Найти интеграл $\int dx/(\cos^4 x)$.
- 18) Найти интеграл $\int \sin 9x \cdot \sin x \, dx$.
- 19) Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$.
- 20) Найти интеграл $\int (x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{6x})/(x(1 + \sqrt[3]{x})) \, dx$.
- 21) Найти интеграл $\int dx/((x-1)(x+2) \sqrt[4]{((x+2)/(x-1))})$.
- 22) Найти интеграл $\int dx/\sqrt{1-2x-x^2}$.
- 23) Найти интеграл $\int (5x+3)/\sqrt{x^2+4x+10} \, dx$.
- 24) Найти интеграл $\int dx/\sqrt{(4-x^2)^3}$.
- 25) Найти интеграл $\int dx/(x + \sqrt{x^2+x+1})$.
- 26) Найти интеграл $\int dx/(1 + \sqrt{1-2x-x^2})$.
- 27) Найти интеграл $\int (x \, dx)/(\sqrt{7x-10-x^2})^3$.
- 28) Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x} (2 + \sqrt{x})^2 \, dx$.
- 29) Найти интеграл $\int \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} / \sqrt[3]{x^2} \, dx$.
- 30) Найти интеграл $\int x^{(-11(1+x^4)^{(-1/2)})} \, dx$.

Список использованных источников

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с.
2. Куликов В.В. Дискретная математика : учебное пособие / В. В. Куликов. — Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2020. — 174 с.

3. Гюнтер Н.М. Сборник задач по высшей математике : учебное пособие / Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 816 с.
4. Натансон И.П Краткий курс высшей математики : учебное пособие / И. П. Натансон. — 10-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 736 с.
5. Горлач Б.А. Ряды. Интегрирование. Дифференциальные уравнения : учебник / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 252 с.
6. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебное пособие / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — 16-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 736 с.
7. Балдин К.В. Математический анализ: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев ; под общ. ред. К. В. Балдина.- 4-е изд., стер.- Москва : ФЛИНТА, 2020.- 361 с.